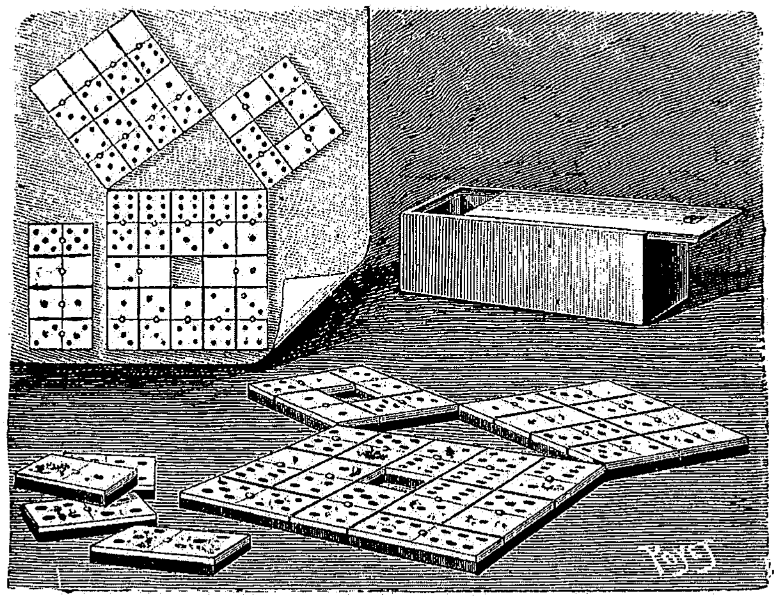
Paradigmes et espaces de travail géométriques.

Alain Kuzniak

Université Paris 7
Denis Diderot

Paradigmes et espaces de travail géométriques



Note pour l'habilitation à diriger des recherches

ALAIN KUZNIAK

Université Paris 7
Denis Diderot

Paradigmes et espaces de travail géométriques

Note pour l'habilitation à diriger des recherches

Alain KUZNIAK

Alain Kuzniak
IUFM Orléans-Tours
alain.kuzniak@iufm.orleans-tours.fr
et
Université Denis Diderot
Équipe Didirem
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

En couverture
Cent nouvelles expériences par Tom Tit
Le carré de l'hypoténuse. Sa démonstration avec un jeu de dominos.
Larousse 1892

Table des matières

Introduction

Cette publication présente les éléments d'un cadre théorique développé pour l'étude de la géométrie enseignée et dont la finalité sur le long terme est de construire une didactique de la géométrie pour la formation des enseignants (PE et PLC). Cette ambition nécessite d'envisager l'enseignement de la géométrie à tous les niveaux de la scolarité. Elle suppose aussi une réflexion sur la nature et les formes de la formation des enseignants. Notre travail de thèse [1994] a contribué à cette réflexion et explicité les modalités de formation utilisées dans les centres de formation pour aider les étudiants à enseigner les mathématiques dans le premier degré. Pour aborder ce thème de recherche alors peu balisé, l'entrée choisie a privilégié la description et l'étude de l'état effectif de la formation. Il en est résulté une classification d'un certain nombre de stratégies de formation utilisées par les formateurs en mathématiques des maîtres du premier degré. La recherche a aussi mis en évidence la « dénaturation simplificatrice» mise en œuvre par les étudiants à la suite de leur formation.

En nous appuyant sur ces premiers résultats, nous avons développé une approche de la didactique de la géométrie élémentaire basée sur une explicitation et un jeu entre ce que nous appelons des paradigmes géométriques. En nous inspirant des travaux de GONSETH, interprétés dans une perspective didactique, nous avons dégagé trois paradigmes au sens de KUHN : la Géométrie I (géométrie naturelle), la Géométrie II (géométrie axiomatique naturelle) et la Géométrie III (géométrie axiomatique formaliste). Plus que les noms, ce qui importe ici c'est l'existence de plusieurs approches cohérentes de la géométrie élémentaire vue comme une théorisation de l'espace.

L'activité géométrique se déploie dans un espace particulier auquel nous avons donné, après quelques hésitations terminologiques, le nom d'espace de travail de la géométrie. Cet espace s'organise autour de trois composantes : l'espace support, le modèle théorique et les artefacts. Cette organisation dépend de la géométrie de référence mais aussi de l'utilisateur. Ainsi, l'espace de travail peut être analysé à différents niveaux : épistémologique, mathématique, cognitif et bien sûr didactique. L'étude didactique porte sur l'intégration de l'espace de travail dans la classe, elle permet notamment de préciser un certain nombre de malentendus.

La notion d'espace de travail de la géométrie est en devenir et reste largement en chantier, la faire progresser en la faisant connaître est un des propos de cette publication. Ouvrir des pistes de recherches est aussi un des autres buts poursuivis, aussi terminons nous par des perspectives et des thèmes de travaux possibles.

Le cadre théorique développé dans ces quelques pages résulte d'une longue et étroite collaboration avec CATHERINE HOUDEMENT. Il doit également beaucoup aux apports de BERNARD PARZYSZ[1], JEAN-CLAUDE RAUSCHER et CATHERINE TAVEAU.

La présentation adoptée reprend pour l'essentiel la note de synthèse pour mon habilitation à diriger des recherches. Elle développe la genèse des notions introduites et elle insiste sur les aspects théoriques de la recherche. Pour des exemples plus concrets, je renvoie le lecteur intéressé aux articles cités ainsi qu'à la publication prochaine, en collaboration avec C. HOUDEMENT, du cours de géométrie du DEA de didactique de Paris VII.

[1]entouré de l'équipe GreDiM de l'IUFM d'Orléans.

Point de départ

Intégrer la réflexion sur la formation des enseignants dans le champ de la didactique des mathématiques

Quelle peut-être la nature d'une recherche en didactique des mathématiques lorsque l'élève est un futur professeur, qu'il a plus de vingt ans et qu'il a fait suffisamment d'études avec assez de réussite pour être diplômé de l'enseignement supérieur ?

Lorsque nous nous sommes posé cette question tout au début des nos recherches en didactique, la réponse n'allait pas de soi. A l'évidence, définir la didactique des mathématiques comme *l'étude de la communication et de la théorisation des connaissances mathématiques dans une classe,* ne suffit plus. Cette formule mérite d'être reprise suivant les trois points qui fondent la relation d'enseignement en situation scolaire : le maître, l'élève et le savoir mathématique mis en jeu dans la relation du maître avec l'élève. Dans une conception étroite de la didactique des mathématiques, on peut comprendre que la réflexion sur la formation des enseignants puisse ne pas appartenir à la didactique des mathématiques. En effet, si l'on exclut les savoirs non mathématiques de toute préoccupation didactique, le futur professeur n'est qu'un élève comme les autres et il suffit alors d'étudier son savoir mathématique. Dans le cas des professeurs de lycée et collège, il s'agit de recherches de didactique des mathématiques dans l'enseignement supérieur. Dans le cas des professeurs d'école, la question apparaît plus subtile et dépend du savoir mathématique de référence. S'il s'agit de celui enseigné à l'école élémentaire, comment penser que des étudiants ne le maîtrisent pas : ce sont alors des élèves en difficulté d'un type un peu particulier. Mais il peut aussi s'agir d'un savoir distancié portant sur le savoir mathématique de base. Dans ce cas, l'idée moins restrictive qui prévalait, était que l'on pouvait alors introduire des connaissances de didactique pour enrichir le savoir mathématique du futur enseignant.

Étudier la formation des maîtres du premier degré, consistait donc à préciser le phénomène de transposition, pour reprendre cette notion alors émergente dans le champ d'étude. Cependant ce point de vue ne résistait pas longtemps à l'analyse : en effet, pour communiquer un savoir, il faut remplir au moins deux conditions : que ce savoir existe et qu'il s'insère dans le jeu de l'institution de formation. Or à la fin des années 80, il était illusoire de s'appuyer sur un savoir didactique trop peu étendu et trop peu stabilisé pour fonder un enseignement suffisamment riche pour préparer les étudiants à leur futur métier.

D'autre part, dans le cas de la formation des enseignants du premier degré, le formateur ne peut négliger le fait que ses étudiants ne sont pas des spécialistes de mathématiques et qu'ils doivent malgré tout devenir enseignant de mathématiques dans un cadre de polyvalence disciplinaire. C'est donc, dans cette situation un peu confuse, que l'idée de faire un état des lieux de la formation en mathématiques des futurs professeurs d'école, nous a semblé comme une nécessité première avant de continuer des études plus spécifiques.

LES STRATÉGIES DE FORMATION

1. Décrire pour comprendre

Notre travail de thèse s'est orienté vers une classification des stratégies des formateurs, ceci afin de parvenir à décrire et à comprendre les différentes formes d'enseignement effectivement utilisées dans les centres de formation. A partir d'une étude précise des conditions de la pratique des formateurs, nous avons dégagé un certain nombre de stratégies que l'on peut regarder comme des idealtypes (Idealtypus) au sens de WEBER[2]. II ne s'agit pas ici de définir a priori les modalités d'une formation « idéale» ou « souhaitable» mais de constater et d'analyser ce qui existe. Les stratégies dégagées apparaissent ensuite comme une aide pour la description d'actions de formation bien déterminée. L'intérêt de la référence à WEBER permet de bien distinguer la description de « ce qui est» (Seiende) de la notion de « devoir-être» (Seinsollende) ou « modèle»[3]. Cette confusion est en effet fréquente dans les études didactiques où le chercheur oscille entre les préoccupations logiques et scientifiques de son étude et les contraintes sociologiques qui pèsent sur l'objet même de sa recherche.

D'autre part, toujours en suivant les idées de WEBER, ces types ne doivent pas être perçus comme des constituants absolus de la réalité mais plutôt comme des approximations provisoires et partielles qui pourront évoluer et être reconstruites au fil de l'étude. Cet aspect évolutif et non dogmatique des différents cadres mis en place tout au long de nos recherches est essentiel, nous le retrouverons en géométrie. Il explique en partie notre intérêt pour la pensée de GONSETH.

Cette attitude de chercheur assez pragmatique apparaît comme une réponse possible lorsqu'on envisage l'étude de systèmes aussi complexes que celui de la formation des enseignants. Ce système est rendu d'autant plus complexe que ses composantes (notamment les étudiants et les savoirs mis en jeu) évoluent constamment dans un environnement institutionnel lui-même fluctuant.

Cette approche conduit également à envisager la question des différents savoirs réellement gérés par l'institution de formation. Nous avons aussi, à travers notre typologie, pu observer le rôle joué par les mathématiques, la didactique ou la pédagogie dans les différentes stratégies. Cela nous a permis d'aborder le problème de la

[2] « L'objectivité de la connaissance dans les sciences et la politique sociales» in *Essais sur la théorie de la science.* Press Pocket 1992 (1906 en allemand) p. 172.

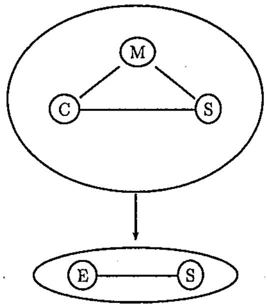
[3] *Ibid.*, p. 174.

transposition de la didactique dans une perspective qui ne réduit pas la formation des maîtres à ce phénomène

2. Un système à deux niveaux

Nous considérons le système de formation comme un système didactique. De manière classique, nous retenons comme élément de base de ce type de système le triplet (M-C-S) constitué par l'enseignant, la classe et un savoir mis en jeu. Ce triplet est plongé dans un milieu qui lui impose de nombreuses contraintes. La finalité que nous assignons au système de formation, sa « production», sera la communication d'un savoir aux élèves (E) qui se traduit par l'augmentation de leurs connaissances individuelles.

Cette conception peut se représenter ainsi :

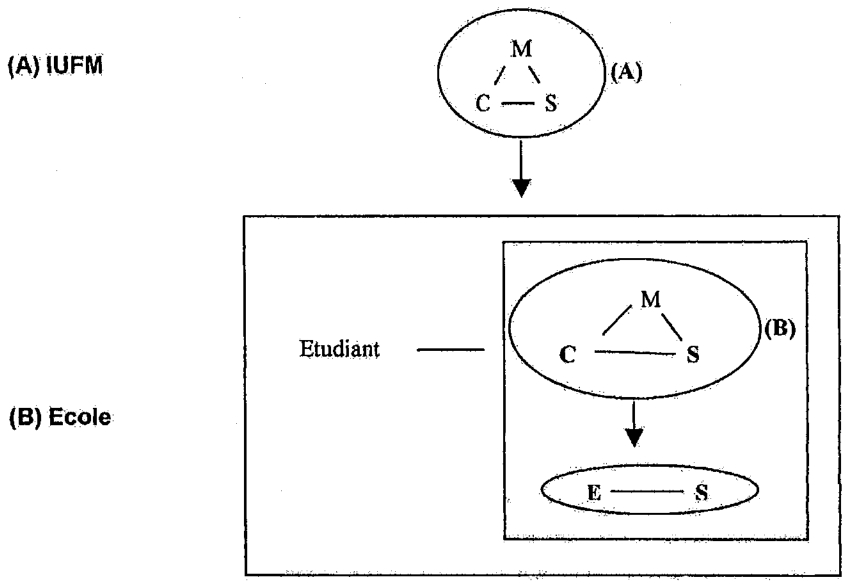


Produit

Dans notre étude, le processus paraît se dédoubler car la fonction de l'I.U.F.M. en tant que système de formation est de faire comprendre aux étudiants un autre système de formation, celui de l'enseignement élémentaire.

Ainsi apparaissent deux systèmes emboîtés : (A), le centre de formation, et (B), l'école élémentaire, dont l'organisation est homologue. Ceci n'entraîne pas leur identité car les composants du système et le milieu dans lequel ils agissent sont très différents.

On peut alors schématiser cette articulation par la figure plus complexe suivante :



La didactique lorsqu'elle se préoccupe de la formation des enseignants est donc nécessairement une didactique de deuxième niveau. En effet, elle doit reprendre systématiquement les questions posées au niveau des élèves en les adaptant au niveau des professeurs.

3. La question des savoirs

Dans le cas des savoirs mis en jeu dans la formation, le changement de niveau didactique n'est pas une simple translation car il crée immédiatement d'autres questions portant sur les contenus de savoir propre à l'enseignant. Ainsi « Que doit savoir un élève ? Et comment lui apprendre ?» devient « Que doit savoir un professeur ? Comment lui apprendre ?».

Dans notre étude, nous avions retenu essentiellement trois formes de savoir : le savoir mathématique, le savoir didactique et le savoir pédagogique. Notre propos n'est pas de relancer le débat sur la définition précise de tous ces savoirs mais simplement de montrer que plusieurs pistes s'ouvrent à la fois pour le formateur et pour le chercheur en didactique. En effet, l'enseignement ou la recherche dépendront du savoir privilégié. La définition de tous ces savoirs et surtout l'exploration de leur contenu, étaient et restent un objet constant de recherche en didactique.

Le savoir mathématique qui est le mieux défini culturellement n'est qu'imparfaitement précisé dans le cadre de la formation des enseignants. Quelles sont les limites de ce savoir pour un futur enseignant ? L'épistémologie et l'histoire des mathématiques ne sont-elles pas des composantes essentielles du savoir mathématique ? De même la réflexion heuristique et in fine la didactique des notions à transmettre aux élèves ne peuvent-elles pas être considérées comme faisant partie du savoir mathématique de base ? Actuellement, il ne semble pas que ce soit le cas. Aussi avons-nous distingué le savoir didactique caractérisé par l'effort de théorisation de type scientifique sur les phénomènes de transmission de connaissances à des élèves. En mathématiques, du moins dans le courant dans lequel nous nous inscrivons, il s'agit d'une théorisation non psychologisante en étroite relation avec l'épistémologie des objets mathématiques.

Il reste un troisième champ de connaissances dont il n'est pas évident a priori qu'il se structure en un savoir organisé que nous désignons sous le nom de « troisième savoir » ou de « savoir pédagogique ». Il s'appuie en fait sur deux piliers bien distincts :

- un savoir procédural, abstrait de l'observation de la pratique enseignante et qui renvoie à l'étude de gestes professionnels. Il vise à rendre les formés plus conscients grâce à une réflexion plus méthodologique ;
- un savoir propositionnel, qui n'est pas théorique mais qui est constitué d'un corpus de propositions d'activités de classe c'est-à-dire d'ingénieries prêtes à être effectuées. Il vise à aider l'enseignant dans sa pratique quotidienne.

4. Articulation des savoirs en formation

Toute la spécificité du travail du formateur d'enseignants réside dans la manière de mettre en jeu de façon cohérente les divers savoirs qui lui semblent utiles et ceci dans un milieu particulièrement complexe. Le choix des savoirs privilégiés et la manière de les communiquer seront très variables et définiront des stratégies différentes.

Suivant l'importance accordée à l'intégration de la perspective professionnelle dans la formation des étudiants, on peut distinguer deux options opposées.

D'un côté, **les stratégies culturelles** privilégient l'accroissement des connaissances dans le domaine mathématique (ou éventuellement dans le domaine didactique) sans se préoccuper de la mise en oeuvre opérée ultérieurement dans les classes par les étudiants. Cette tâche de recomposition est entièrement laissée à l'initiative de l'étudiant. D'une certaine façon, ces stratégies ne respectent pas le contrat qui fonde les instituts de formation des maîtres et qui suppose une spécificité du savoir lié à l'enseignement.

De l'autre, nous avons les stratégies axées sur la préparation professionnelle au métier de professeur d'école (ou d'instituteur) au sein de la structure existante. Elles s'assignent toutes le même but : rendre les étudiants capables d'enseigner en utilisant des activités de formation spécifiques. Parmi celles-ci, nous avons distingué trois grands types de stratégies.

Les stratégies basées sur la monstration sont les plus éloignées des stratégies culturelles. Elles privilégient la transmission de pratiques d'enseignement par l'observation de leur mise en oeuvre dans des classes élémentaires. Dans sa forme la plus simple, il s'agit de transmettre une pratique en la montrant aux étudiants et en la faisant imiter. Le savoir mis en jeu n'est pas, ou très faiblement, théorisé.

Les stratégies basées sur l'homologie tentent d'articuler savoir mathématique et savoir pédagogique. Cette fois, l'enseignement est également basé sur l'imitation, mais une imitation complexe et transposée par le formé. Ce dernier est appelé à mettre en place dans sa classe un enseignement inspiré de celui qu'il a pu vivre en tant qu'étudiant dans le centre de formation. Dans ces stratégies d'homologie, le formateur souhaite communiquer sa propre conception, supposée explicitée, de l'enseignement des mathématiques en la mettant en œuvre dans son enseignement. Il attend que les étudiants utilisent, ultérieurement dans leur classe, certaines des séances qu'ils ont vécues en tant qu'élève dans le centre de formation.

Le développement du savoir didactique et également du savoir pédagogique axé sur l'observation des pratiques a conduit à l'émergence de **stratégies basées sur la transposition**. Elles se distinguent de l'homologie par l'insistance mise sur la distanciation théorique. Elles se proposent de transmettre des savoirs de référence de type didactique ou pédagogique en contrôlant le phénomène de transposition opéré par le formateur sur le savoir transmis et par le formé sur le savoir reçu. Cette prise en compte de la restructuration opérée par le formé dans sa pratique de la classe les distingue des stratégies culturelles.

5. La dénaturation simplificatrice

Au moment de mon travail de thèse, les stratégies d'homologie étaient dominantes au moins chez les formateurs qui avaient le plus conscience de la spécificité de leur métier. Cela était dû à plusieurs raisons : le faible niveau mathématique des étudiants, le faible développement théorique et/ou la faible diffusion des savoirs didactique et pédagogique et enfin la volonté militante, chez les formateurs, de transformer les pratiques des enseignants.

Nous avions qualifié ces stratégies d'*arte povera* dans la mesure où elles s'accommodaient de faibles ressources pour en tirer le maximum. De fait, avec la diminution du temps accordé à la formation des enseignants, elles paraissent avoir pu se développer dans un environnement institutionnel plus riche que l'actuel. Par contre, les savoirs de référence potentiels se sont réellement développés depuis.

Les stratégies d'homologie intégraient le fait que les stratégies culturelles mises en place dans les Écoles Normales au moment de la réforme des mathématiques modernes, avaient échoué. Il en était de même pour les tentatives d'un enseignement académique de rudiments de didactique des mathématiques.

Dans les stratégies d'homologie, le choix de la situation à mettre en place est fondamental. Plusieurs possibilités s'offrent au formateur.

- La situation proposée est la même pour les enfants et les futurs enseignants.
- La situation présentée aux adultes est légèrement plus complexe mais aisément transférable.
- La situation présentée aux étudiants n'est pas susceptible d'un transfert simple à l'école primaire.

En fait, le choix de ces situations dépend de l'appréciation par le formateur des difficultés liées à la notion mathématique abordée. Nous pouvons formuler ici deux hypothèses étudiées dans notre thèse.

H1 Une situation simple permet une prise de conscience nette de la démarche pédagogique suivie, mais en contrepartie elle risque d'infantiliser l'étudiant et/ou de provoquer son rejet.

H2 Une situation plus complexe transmet un savoir mathématique non trivial aux étudiants, mais la nouveauté de ce savoir peut occulter la démarche suivie.

Une évaluation des stratégies d'homologie a permis de repérer le phénomène de « dénaturation simplificatrice». En effet, nous avons pu observer dans les classes, une fois la formation terminée, un phénomène de simplification et parfois de dénaturation.

- Les étudiants opèrent une simplification de la situation qui leur permet de préparer des séances que leur savoir mathématique suffit à dominer.
- Il y a dénaturation à partir du moment où la simplification transforme la nature du savoir mis en jeu ou modifie radicalement les démarches pédagogiques initiales.

Ceci est dû en partie au fait que les stratégies basées sur l'homologie supposent implicitement que le transfert opéré par l'étudiant n'est pas problématique. La réflexion sur le phénomène de transposition du savoir qui s'opérera ensuite de la part des étudiants est généralement absente. Les explicitations ne visent de la part du formateur qu'à mieux se faire comprendre. Cette absence d'attention à la transposition opérée par les étudiants cache aux formateurs cette « dénaturation simplificatrice».

Le problème que nous avons alors envisagé peut se résumer dans la question suivante :

> Comment maîtriser le phénomène d'adaptation et de transposition effectué par l'étudiant dans sa classe ?

Pour aborder ce problème, et tenter d'avancer sur les modalités offertes à un formateur pour délimiter cette dénaturation, l'idée a été d'introduire et d'étudier des situations de formation qualifiées de Petites Provocations Didactiques (PPD). Ces situations sont des situations d'homologie insérées dans une perspective de transposition.

Pour avancer dans cette étude, il devient essentiel de se centrer sur un savoir mathématique spécifique. Or, HOUDEMENT [1995], dans sa thèse sur l'étude des thèmes mathématiques enseignés en formation, avait précisé certaines remarques contenues dans notre travail de thèse et certaines hypothèses avancées sur l'emploi des stratégies d'homologie. Dans ce cadre, la géométrie occupait une place particulière, elle n'était enseignée dans les centres de formation que grâce à des situations d'homologie. De plus, les étudiants se jugeaient faibles en géométrie et peu confiants en leurs compétences. Mais ils étaient très désireux de travailler ce thème pendant leur formation. Voilà qui spécifiait le thème mathématique de notre recherche : la géométrie.

Première transition
Vers l'étude de la géométrie enseignée

Pour aborder le problème de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, une définition précise de l'objet à enseigner est cruciale tant le terme de géométrie est multivoque. La question de la nature de la géométrie enseignée agite périodiquement la noosphère éducative, il n'est qu'à voir les récents rapports de la CREM [2000] et aussi de la Royal Society [2001] qui, chacun à leur manière, réaffirment la nécessité d'un enseignement de la géométrie en précisant sa fonction.

Nous reprenons brièvement ce problème avec un point de vue axé sur la formation des enseignants qui en modifie la perspective.

La question « Qu'est-ce que la géométrie ?» se particularise souvent, et presque immédiatement, dans l'institution scolaire en une question de type utilitariste « Pourquoi faire de la géométrie ?». Il ne s'agit plus simplement d'une question ontologique ou épistémologique mais d'une question fonctionnelle qui peut déterminer l'existence même de la géométrie dans l'institution. En effet, la réponse à cette question ne va pas de soi puisque dans certains pays il n'y a pas d'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire ou très peu (canton de Genève, province de Québec).

Pour un enseignant, et à plus forte raison pour un formateur d'enseignants, la question peut être formulée plus exactement en « Pourquoi faire faire de la géométrie ? ». De manière classique en formation des maîtres, cette question a deux aspects : l'un qui concerne les élèves et l'autre qui concerne les futurs enseignants.

De plus, dans le cadre de la formation d'enseignants, le formateur doit aussi définir une stratégie de formation adéquate afin de permettre aux futurs maîtres d'enseigner aux élèves une géométrie correspondant le plus possible à ses idées sur la géométrie mais aussi conforme aux programmes officiels. Évidemment cela suppose que le formateur en question ait une claire conscience de ces diverses conceptions sur la géométrie et, finalement, nous bouclons le cercle de nos questions en revenant à la question initiale et finalement essentielle « Qu'est-ce que la géométrie ? ». Mais cette fois, cette question prend deux formes particulières pour le formateur d'enseignants qui s'intéresse à la géométrie :

> Quelles peuvent être la nature et la fonction de la géométrie enseignée aujourd'hui ?
>
> Quelles stratégies utiliser en formation des maîtres pour enseigner

cette conception de la géométrie ?

Notre recherche s'est développée en ayant en toile de fond cette double préoccupation. La première a débouché sur la mise en place d'un cadre théorique destiné à étudier la géométrie enseignée. La seconde nous a conduit à développer des modalités d'action didactique et notamment, mais pas seulement, une forme de situation didactique que nous avons appelée « Petite Provocation Didactique ».

UN CADRE THÉORIQUE POUR LA GÉOMÉTRIE ENSEIGNÉE.

Dans notre article, au titre un peu provocateur de « Faut-il continuer à enseigner la géométrie en formation des maîtres du premier degré ? »[4], nous avions soulevé quelques paradoxes liés à l'enseignement de la géométrie pris entre deux conceptions opposées qui pouvaient conduire à ce niveau à un phénomène de double évacuation de la géométrie comme objet d'étude.

La première conception, la tendance concrète, tend à réduire la géométrie à une appropriation de connaissances spatiales basées sur la manipulation de différents matériels. Les objets de cette géométrie sont situés dans le monde des objets physiques et matériels. La seconde, la tendance abstraite, fait évoluer la géométrie (et les mathématiques en général) vers une étude des structures (programme d'ERLANGEN de KLEIN 1872). Cette fois, il s'agit clairement d'une géométrie insérée dans le monde des théories. Dans cette conception, particulièrement défendue par DIEUDONNÉ [1963], la géométrie élémentaire n'existe plus en tant que telle ; elle n'est plus qu'une partie de l'algèbre linéaire. Or l'algèbre linéaire n'est pas un objet d'étude mathématique de l'école (ni des professeurs d'école).

A cela, s'ajoute le fait que nombreux sont ceux qui pensent que sans démonstration, il n'y a pas de géométrie or les capacités de l'élève de l'école ne lui permettent pas d'accéder à cette maîtrise bien calibrée du raisonnement.

Les conséquences de ces diverses conceptions vont se faire sentir dans les centres de formation (I.U.F.M.) des enseignants. En effet, s'il n'y a pas de véritable géométrie à l'Ecole Elémentaire, faut-il continuer à enseigner la géométrie en formation des maîtres du premier degré ?

De même si la géométrie de l'école se réduit à un ensemble de manipulations d'objets, ne vaut-il pas mieux laisser les futurs maîtres les découvrir eux-mêmes ? Dans la formation des Professeurs de Lycée et Collège, le problème de l'articulation entre la vision abstraite et purement algébrique, et la nécessité d'enseigner une géométrie basée sur l'étude des configurations devient épineux et culmine peut-être dans certaines leçons de géométrie proposées à l'Oral du Capes. Par exemple, dans celle qui porte sur les relations métriques dans le triangle rectangle, l'étudiant peut proposer une leçon parfaitement cohérente dans le cadre des espaces affines euclidiens, en définissant l'angle droit grâce à la nullité d'un produit scalaire. Il reste alors assez démuni lorsqu'on lui demande ce qu'est un angle droit pour un

[4] *Actes du colloque de La grande Motte,* Irem de Montpellier 1997 pp. 187-197.

élève de collège (son futur élève ?).

D'autre part, que devient cette vision de la géométrie abstraite dans un contexte où, pour une très grande partie des élèves, l'enseignement cesse après la classe de seconde ? En outre, les grandes catégories d'utilisateurs potentiels n'envisageront souvent la géométrie dans leur futur métier que d'un point de vue technologique.

La nécessité de préciser la nature de la géométrie enseignée en fonction des perspectives diverses qu'elle offre, nous a conduit à faire éclater la géométrie élémentaire en plusieurs types de géométries (Géométrie I, II et III) correspondant à des enjeux différents. Comment avons nous articulé une préoccupation épistémologique avec une finalité didactique ? Tel est le propos des deux parties qui suivent et qui prennent en compte l'enjeu épistémologique et l'enjeu didactique.

1. L'enjeu épistémologique

Dans un de ses rares articles publié sur la géométrie, BROUSSEAU[5] affirme :

Depuis que la géométrie élémentaire est une théorie « achevée »du point de vue scientifique, les transformations que subit son enseignement sont entièrement des productions de l'activité didactique des professeurs.

Il attire ensuite l'attention sur la nécessité de trouver un substitut à *la vigilance épistémologique « naturelle »(absente du fait de l'extinction de la recherche)* pour éviter la *« didactification » incontrôlée de la géométrie* qu'il constate dans les pratiques des professeurs. Nous partageons cette préoccupation de vigilance épistémologique bien que nous récusions en grande partie le fait que la géométrie élémentaire soit une théorie totalement achevée, et que, de plus, nous ne considérons pas la distance entre contenu enseigné et production didactique comme spécifique de la géométrie enseignée : la plupart des savoirs mathématiques actuels sont concernés par cette remarque. Il nous semble que notre travail, en intégrant dans le champ de la didactique une épistémologie explicite de la géométrie enseignée, participe de cette vigilance épistémologique souhaitée par BROUSSEAU.

1.1 Du cadre géométrique aux paradigmes géométriques

Pour travailler le lien entre savoir mathématique et enseignement, la didactique doit créer des outils particuliers qui abordent de front cette articulation. C'est dans cette perspective que nous considérons la notion de cadre introduite par DOUADY [1986]. Pour elle :

Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et à ces relations. Nous concevons la notion de cadre comme une notion dynamique.

D'entrée, comme dans toutes les approches fructueuses en didactique, DOUADY insère dans la notion de cadre, l'individu dans sa relation aux mathématiques. Elle le fait ici par l'intermédiaire de la notion d'images mentales qui nécessite bien sûr

[5] *Thèse de doctorat d'état* Université de Bordeaux 1985 p. 481.

d'être précisée. Si on laisse de côté son association à des images mentales, la notion de cadre apparaît alors comme étroitement liée au savoir mathématique savant. C'est l'évolution mathématique qui va déterminer la nature du cadre mais les frontières sont parfois confuses et fluctuantes. D'autre part, le renvoi du cadre à une branche des mathématiques suppose une explicitation de ce que le didacticien ou plus généralement l'utilisateur du mot retient sous le terme en question et s'il est bien un cadre qui mérite d'être caractérisé, mathématiquement parlant, c'est bien celui de cadre géométrique. En effet, un emploi univoque et sans ambiguïté de ce terme supposerait que la référence à la Géométrie utilisée soit évidente. C'est peut-être le cas dans l'étude de DOUADY qui porte sur l'école élémentaire et le début du collège. Ce n'est certainement pas vrai en dehors de ce contexte.

D'autre part, un domaine mathématique va se constituer en organisant et en agrégeant des connaissances mais, comme le signale BROUSSEAU [2002], cette organisation ne correspondra pas nécessairement à celle qui ensuite sera mise en œuvre dans l'enseignement. Ainsi, pour spécifier le contenu mathématique du cadre, nous sommes obligés d'intégrer dans notre réflexion les pratiques mathématiques dans les différents niveaux scolaires.

Toutes ces remarques nous ont conduits à préciser et à enrichir la notion de cadre géométrique : c'est le propos de notre approche par les paradigmes. En effet, nous avons posé en hypothèse le fait que :

H Des paradigmes différents et cohérents sont englobés sous le terme unique de géométrie. L'existence de ces différents paradigmes explique en partie la rupture que l'on rencontre dans l'enseignement, entre les différents cycles de l'enseignement.

A cette première hypothèse est associée une deuxième portant plus directement sur des enjeux de formation des enseignants et sur la présence dans le jeu paradigmatique d'un individu aux caractéristiques très variables.

H' Étudiants (des IUFM), enseignants et élèves de l'école primaire se situent implicitement dans des paradigmes différents : cette différence de position épistémologique est source de malentendus pédagogiques.

Mais restons sur la question des paradigmes qui nécessite quelques précisions terminologiques, ne serait-ce que sur le terme lui-même. Dans notre conception, l'idée de paradigme mise en jeu s'inspire de celle que KUHN [1962] a développée dans son ouvrage sur la structure des révolutions scientifiques. KUHN fut l'objet de vives critiques sur l'emploi très varié de ce terme dans son livre. Cela l'a conduit à préciser sa définition du mot paradigme [1977].

Deux aspects principaux, en fait deux facettes du concept, sont alors soulignés par KUHN.

1. Le mot paradigme, dans son aspect global, désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de poser un problème et d'en entreprendre la résolution. Dans ce sens KUHN parle aussi de matrice disciplinaire qui permet de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d'un groupe qui travaille sur le même sujet.

2. Dans un deuxième sens, intéressant dans une perspective d'enseignement, il caractérise les exemples significatifs qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global. Cela renvoie à la pratique par les individus de ce champ disciplinaire.

Cette vision nous semble particulièrement utile et pertinente en formation des enseignants ; le premier point insiste sur la théorie de référence, le second sera déterminant dans la mise en place d'un milieu didactique adapté à la transmission du paradigme de référence.

Comment peut s'effectuer le passage d'un paradigme à l'autre ? Dans la conception de KUHN, basée sur l'étude des sciences, le paradigme nouveau se substitue à l'ancien, il s'opère une véritable rupture, une révolution. L'importation en mathématiques de cette idée de révolution a suscité de vives controverses dont l'ouvrage collectif de GILLIES [1992] rend compte. Dans ce livre, les tenants d'une évolution sans révolution à la suite de CROWE, affirment que l'apparition de nouvelles conceptions et de nouvelles façons de résoudre les problèmes n'invalide pas, contrairement à la Physique, les anciennes manières de faire qui restent valables mais ne sont plus utilisées. Pour les autres dont DAUBEN et GRAY, cette évolution des conceptions est tellement radicale qu'elle empêche de penser dans le paradigme ancien. Par ailleurs, il y a aussi le sentiment des « fondateurs » eux-mêmes. Ainsi, évoquant la parution du livre de L'HOSPITAL sur le calcul infinitésimal [1696] dont il avait fait la préface, FONTENELLE [6] [1719] emploie le mot de révolution pour caractériser ce changement.

> *L'universalité surprenante des Méthodes, l'élégante brièveté des démonstrations, la finesse et la promptitude des solutions les plus difficiles, une nouveauté singulière et imprévue, tout attirait les esprits, et il se faisait dans le Monde Géomètre une révolution bien marquée (Eloge de Rolle).*

En géométrie, il suffit de lire, par exemple, le texte de RIEMANN [1854] ou celui d'HILBERT [1899] sur les fondements à la géométrie pour avoir le sentiment que ces textes posent les éléments d'un mode de pensée nouveau.

Pour déterminer les paradigmes géométriques utiles dans un système aussi complexe que celui de la formation des maîtres, il est nécessaire de disposer d'une épistémologie suffisamment riche de la géométrie confrontée à sa transmission scolaire. Il ne s'agit donc pas nécessairement d'effectuer une recherche en épistémologie mais de produire une interprétation de certains travaux relatifs à notre thème dans une perspective didactique. Ce problème méthodologique délicat a déjà fait l'objet de l'attention des didacticiens confrontés à la réflexion sur la nature du savoir mathématique dans le cadre scolaire. Nous ne reviendrons ici que sur deux aspects qui nous ont particulièrement préoccupés : l'aspect herméneutique envisagé dans la perspective de GADAMER et l'idée de problèmes épistémologiques privilégiée par DESANTI.

D'un point de vue méthodologique, nous avons retenu pour l'étude des divers textes de mathématiciens ou de philosophes, le point de vue herméneutique de GA-

[6] Cité en anglais par Dauben p 51 de Gillies. Le texte cité est l'original en français.

DAMER [1959] sur un mode d'interprétation qui insiste sur l'importance de la formulation de la question et sur l'effet d'horizon propre au lecteur. Ainsi, comme notre questionnement porte sur la nature de la modélisation de l'espace dans le cadre de la géométrie enseignée, nous emploierons librement des termes comme micro-, meso- ou macro-espace. Ces notions ne figurent évidemment pas dans la littérature mathématique étudiée et renvoient au champ de la didactique qui nous préoccupe. C'est en cela que nous pouvons parler de lecture didactique d'un texte mathématique ou épistémologique.

Dans son article « Qu'est-ce qu'un problème épistémologique ? », après avoir fait part de la difficulté qu'il éprouve pour définir ce qu'est l'épistémologie, DESANTI [1975] préfère s'engager sur l'idée de problèmes épistémologiques définis comme des problèmes surgissant à l'intérieur des sciences et qui ne peuvent être résolus à l'intérieur du système formé par ces mêmes sciences. En s'appuyant sur ses travaux sur les fondements de l'analyse, il distingue ensuite plusieurs niveaux de problèmes. Ces niveaux dépendent de leur relation plus ou moins étroite à l'objet même de la théorie.

Dans le cas la géométrie élémentaire considérée dans un premier temps comme la science de l'espace, le premier problème à envisager est justement celui de la relation de la géométrie et de l'espace. Cette question peut être vue comme portant sur la modélisation avec les deux temps classiques de ce type de problèmes : la constitution d'un système homogène et cohérent d'hypothèses constitué en un modèle, la confrontation de ce modèle avec des résultats expérimentaux. Chacun de ces deux temps nécessite une étude spécifique. Un deuxième type de problèmes plus abstrait, de deuxième niveau, porte sur la nature des objets et des relations entre les constituants du modèle, sur son optimisation, sur sa cohérence formelle. Dans une perspective didactique, ces deux types de problèmes renvoient à une mise en place de la géométrie enseignée vue soit comme le modèle de l'espace, soit comme un exemple de système déductif exhaustif.

Ces problèmes ont fait l'objet de nombreuses études et notre choix de privilégier l'apport de GONSETH est certainement dû au fait qu'il met au cœur de sa préoccupation la relation de la géométrie avec la réalité et que d'autre part il propose une vision suffisamment évolutive du problème pour éviter tout dogmatisme en la matière.

Ainsi, nous pouvons dire que notre vision de la géométrie élémentaire comme éclatée en trois paradigmes distincts emprunte à la fois à GONSETH et à KUHN. Cependant, et c'est la grande particularité de notre étude, elle ne trouve sa pleine justification que dans la confrontation avec la réalité de l'enseignement.

1.2. Trois géométries élémentaires

Pour notre recherche, les périodes de crise mathématique autour de la géométrie sont certainement les plus intéressantes à étudier. D'abord, leur existence même prouve le bien-fondé d'une réflexion qui s'appuie sur des changements ou des glissements de paradigmes. Ensuite leur étude permet de dégager les spécificités de ces paradigmes. Dans cette optique, trois périodes nous ont semblé riches d'enseignements.

- La fondation un peu mythique de la géométrie grecque au VI^e^ siècle avant J.C.
- La discussion sur la nature des axiomes et leur caractère d'évidence débutée au XVII^e^ siècle.
- L'apparition des géométries non-euclidiennes au XIX^e^ siècle et le débat qu'elles ont suscité.

Cette dernière crise a permis de distinguer la géométrie abstraite, ou pure, de la géométrie physique et d'avancer dans la résolution du difficile problème de la liaison entre géométrie et réalité. La géométrie abstraite présuppose qu'on peut comprendre un traité de géométrie sans connaître la nature des entités dont il parle. Ce point de vue conduit à une approche logiciste de la géométrie où le *raisonnement* s'appuie sur la *déduction* logique à l'intérieur d'un système d'axiomes et constitue le seul socle de véracité et de réalité. Pour connaître un objet, il suffit de donner ses propriétés internes et alors, sans surprise, tous les états des choses possibles sont également donnés.

A l'opposé de ce point de vue, il y a la géométrie physique qui s'appuie sur l'*expérience*, seule source légitime de validation des affirmations. Sa source principale de créance est sa conformité avec les indications fournies par les sens et notamment la vue. Ainsi apparaît un autre pôle de légitimation : l'*intuition*. Entre les deux, existe une géométrie de transition qui tente de concilier le cadre physique et le cadre logique.

Le propos de notre recherche a été de caractériser ces trois géométries en vérifiant leur adéquation à l'institution scolaire. Nous ne reprendrons pas ici l'étude des modes de pensée que sont l'intuition, l'expérience et la déduction, que nous avons développée[7] à partir des travaux de GONSETH. Notons simplement que l'articulation de ces trois modes de pensée caractérise pour GONSETH, la pensée du géomètre sur l'espace. D'autre part, ils sont essentiels pour distinguer l'aspect empirique et l'aspect théorique de la géométrie, le premier s'appuyant sur l'intuition et l'expérience, le second prenant plus particulièrement appui sur la déduction.

1.2.1. La Géométrie I : la géométrie naturelle

La géométrie naturelle a pour source de validation la réalité, le monde sensible. Il y a une certaine confusion entre modèle et réalité. La déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments. Dans son étude très détaillée de la naissance de la géométrie grecque, CAVEING[8] montre l'étroite relation entre les problèmes résolus par les Grecs (notamment le problème de la distance d'un bateau au port) et le développement de cette première géométrie. Les visées de cette géométrie sont en étroite relation avec le réel : les résultats doivent être appliqués à des problèmes du monde des objets physiques et matériels. Dans le cas cité de l'appréciation de la distance d'un bateau au port, la solution finale du problème aboutit à un système opérationnel de bornes sur le terrain. Il s'agit en fait d'une première abstraction de la réalité qui propose

[7]Voir par exemple nos articles (8) et (9).

[8]M. CAVEING, *La figure et le nombre*, Septentrion Lille 1997.

des schémas comme dessin de la réalité et comme description du fonctionnement de celle-ci. D'ailleurs, CAVEING[9] signale que, dans ces premières mathématiques, *schema* désigne les figures simples abstraites de la réalité comme les triangles, les quadrilatères etc. Ce mot s'oppose à *diagramma* qui désigne une figure complexe assemblage de ces *schema*. Ces diagrammes sont des supports de propriétés : le but du jeu est alors d'assembler les schémas dans un diagramme qui leur donne du sens, comme dans le premier Théorème de THALÈS qui articule un triangle rectangle et un demi-cercle.

La déduction peut être aussi liée à une expérience mécanique articulée sur le monde sensible, ou le résultat d'un pliage. Ainsi que ce soit par pliage ou par « mouvement virtuel », la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie naturelle de type expérimental. Le raisonnement que privilégie cette approche est un raisonnement de type constructif. L'horizon de la Géométrie I est un horizon technologique.

1.2.2 La Géométrie II : la géométrie axiomatique naturelle

Dans cette géométrie, la source de validation se fonde sur les lois hypothéticodéductives dans un système axiomatique le plus précis possible. Mais le problème du choix du système d'axiomes et de la place de la réalité se pose quand on axiomatise. Dans la Géométrie II est privilégié le point de vue d'un pas de côté par rapport à la réalité : le système axiomatique retenu doit en être le schéma le plus fidèle possible.

L'axiomatisation proposée est certes une formalisation mais elle n'est pas formelle car ici la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique. Et cette sémantique renvoie à la réalité. La géométrie euclidienne classique est fondée sur ce pas de côté, mais tout l'effort de schématisation est dissimulé et reste implicite.

La correspondance entre cette « axiomatisation schématisante » et la perception de l'espace reste intrigante ; on peut signaler l'apport d'ENRIQUES[10] pour qui l'évidence de la géométrie réside à la fois dans la possibilité d'évoquer des expériences inconscientes dans l'intuition des images et aussi dans cette possibilité de rencontrer dans les postulats les opérations d'association et d'abstraction exécutées sur des éléments constitutifs de l'espace[11].

Enfin, il est possible d'envisager une axiomatisation partielle, voire des îlots d'axiomatisation, qui permettent le raisonnement. Dans cette géométrie l'axiomatisation est en marche comme horizon de la modélisation.

La relation étroite de ces deux premières géométries avec l'espace permet de les classer dans les sciences de la nature d'où l'emploi du terme « naturel »pour les caractériser.

---

[9] *op. cité* p. 72.

[10] F. Enriques *Problemi della scienza* Zanichelli Bologne (1906) 1989 p. 201.

[11] PIAGET critique cette *épistémologie psychologique* refermée sur elle-même et propose les méthodes de la psychologie expérimentale pour progresser sur ce type de questions. J. PIAGET *Introduction à l'épistémologie génétique* PUF 1950 tome I p. 18 et sq.

1.2.3 La Géométrie III : la géométrie axiomatique formaliste

Cette fois, à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose. L'approche axiomatique formaliste est bien explicitée par la rude affirmation de WITTGENSTEIN[12] qui clôt le débat entre géométrie et réalité : *Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité.*

La mise en place de cette géométrie renvoie plutôt à une problématique de la cohérence logique, son horizon sera logique et formel. Par contre, nous verrons qu'elle crée en quelque sorte l'espace dans lequel elle s'insère : en effet, dans cette approche, le concept d'espace désigne l'ensemble des relations existantes entre les points indépendamment de la perception de ces points. Cela a donné naissance à des espaces comme celui de PLÜCKER (espace où les points sont nos cercles intuitifs) ou plus généralement les espaces de paramètres.

Une différence essentielle avec la Géométrie II porte sur la complétude du système d'axiomes qui devient essentielle alors que nous l'avons vu l'axiomatisation partielle était le propre de la Géométrie II.

Nous pouvons résumer les relations des diverses Géométries avec l'espace dans le tableau suivant :

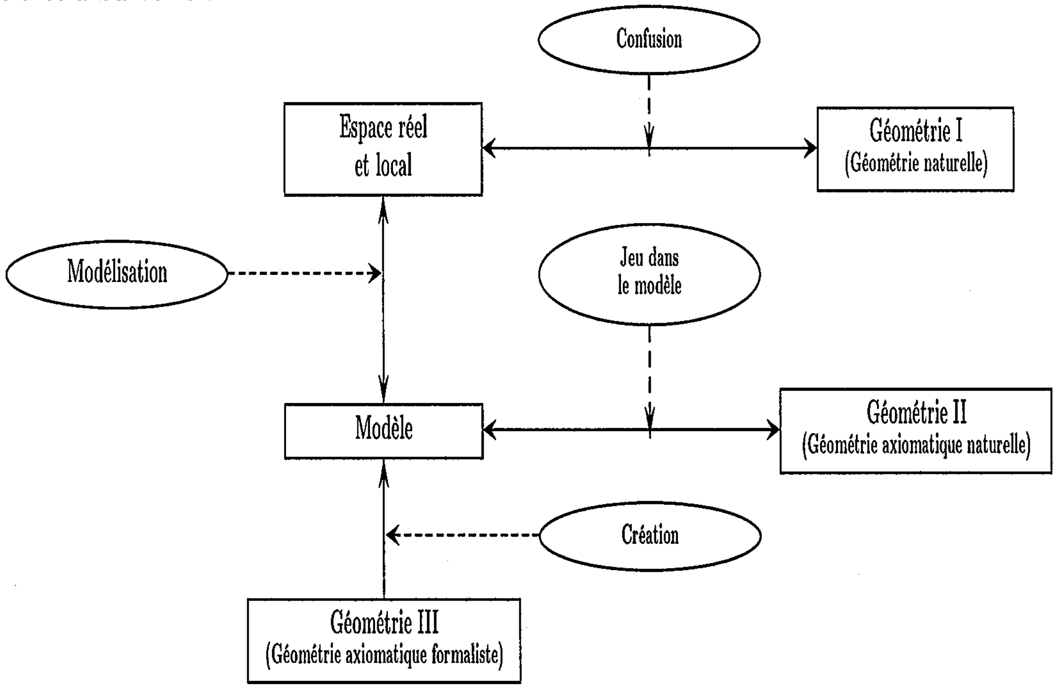


Figure 2.1 - Le schéma général des différents paradigmes géométriques

1.3. Paradigmes et jeux de cadres

L'éclatement de la géométrie en différents paradigmes géométriques a pour effet de créer plusieurs cadres géométriques, chacun d'entre eux étant associé à une Géo-

[12]L. Wittgenstein *Remarques philosophiques.* XVI.177 Gallimard (1964) 1975 p. 205.

métrie. Notre approche permet ainsi de distinguer deux types de jeux de cadre. Le premier, que l'on peut qualifier d'externe, fait interagir chaque cadre géométrique avec un cadre non géométrique. Le second type de jeux, interne à la géométrie, met en relation les différents cadres géométriques.

Dans le jeu de cadre externe, les cadres associés ont souvent comme principale fonction de mettre en place un « calcul »(numérique, algébrique ou vectoriel) qui se substitue à la difficile démarche déductive que privilégie la géométrie. Cette dernière se décline alors en de multiples formes spécifiées par des qualificatifs différents : analytique, algébrique, vectorielle...

Un cadre extérieur particulièrement important est certainement le cadre numérique. Il mériterait le même travail d'approfondissement et de définition que celui que nous avons effectué sur le cadre géométrique. Ce cadre dépend notamment de l'ensemble de nombres utilisés sur lesquels le calcul est possible : ce calcul pouvant être exact ou approché. En Géométrie II, ce sont les nombres réels qui vont intervenir ; ils pourront être vus, suivant les cas, comme limites de suites de nombres rationnels ou de nombres décimaux. La différence d'approche de l'approximation, et par conséquent de la notion d'exactitude, distingue profondément la Géométrie I de la Géométrie II, et de fait le cadre privilégié de la Géométrie I s'apparente à un cadre numérique mais articulé sur la mesure (cadre numérique mesuré). Le calcul s'opère sur les nombres décimaux ou sur des fractions : il doit intégrer la prise en compte d'encadrements.[13]

Le nouveau jeu de cadre interne à la géométrie nous semble fondamental dans une visée didactique : nous écrirons ces jeux entre deux Géométries (GI|GII) ou (GII|GIII). Nous notons ainsi toutes les articulations entre deux Géométries où la seconde Géométrie du couple, contrôle et assure la validité des techniques et des méthodes mises en œuvre dans l'autre Géométrie. La première constitue une source de problèmes et d'images pour la seconde. La mise en place de ce jeu par l'enseignant et sa maîtrise par un élève sera un des buts de l'enseignement de la géométrie.

1.4. L'espace de travail de la géométrie

La notion d'espace de travail de la géométrie intervient de façon naturelle lorsqu'on envisage une réflexion sur la géométrie élémentaire conçue comme le fruit d'une interaction entre un individu et des problèmes géométriques. Ces problèmes sont abordés à l'intérieur d'une certaine vision paradigmatique (la géométrie mise en jeu) qui impose à la fois ses modes d'appréhension et ses modes de traitement du problème. Dans un premier temps, pour définir la spécificité du jeu géométrique, il faut y intégrer un expert idéal en tant qu'utilisateur. Il s'agit en quelque sorte d'un sujet « épistémique ». L'espace de travail ainsi défini sera qualifié d'idoine. Plus loin, nous envisagerons l'espace de travail géométrique personnel d'un individu quelconque.

[13]Les cadres numériques ne sont pas une partie constituante obligatoire d'une Géométrie, par exemple en Géométrie I, l'essentiel est l'approche expérimentale qui peut s'appuyer ou non sur le résultat d'un mesurage.

1.4.1 Vers une définition

L'espace de travail doit réaliser, au sens de rendre réel, des articulations entre plusieurs éléments dont les plus caractéristiques sont un référentiel théorique, des objets géométrique et un milieu matériel. Nous appellerons *espace de travail de la géométrie* un univers organisé pour le travail du géomètre. Cet espace se structure grâce à la mise en réseau des trois composantes [voir figure] que sont l'espace réel et local en tant que support matériel, l'ensemble des artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre et enfin un référentiel théorique qui dépendra de la géométrie choisie.

La précision des diverses composantes va se faire en relation avec la nature de la Géométrie mise en jeu. Le paradigme de référence permet d'interpréter les contenus des composantes qui en retour par leurs fonctions différentes participent à la spécificité des différents paradigmes. Nous serons souvent confrontés à cet apparent paradoxe qui fait définir comme géométrique la fonction d'un objet lorsqu'il intervient dans une géométrie que nous essayons justement de mieux définir. Le fait que la nature des composantes dépende du paradigme de référence conduit à envisager l'existence d'espaces de travail spécifiques associés à chaque paradigme, nous parlerons alors d'*espace de travail géométrique de référence.*

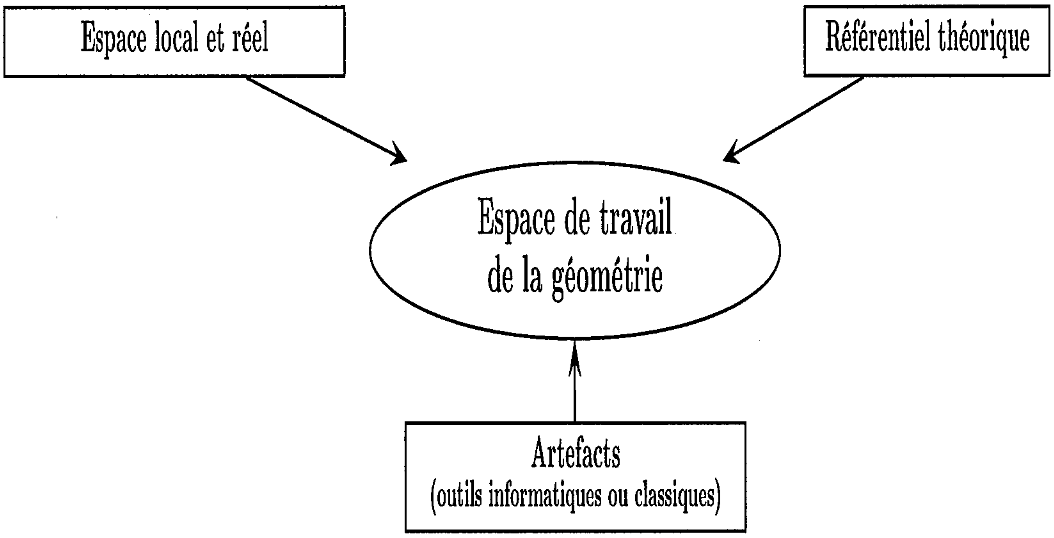


Figure 2.2 - L'espace de travail géométrique

D'autre part, les différentes composantes sont chacune en étroite relation avec l'un des modes de connaissance de l'espace. Ainsi l'espace est plus particulièrement lié à l'intuition, les artefacts à l'expérience, le modèle théorique au raisonnement déductif. Pour éclairer notre conception de l'espace de travail, nous ferons référence à la reconstitution dans un musée, par un ethnologue, d'un atelier de forgeron. L'ethnologue disposait de l'atelier originel non utilisé depuis la mort du forgeron. Au cours du travail de prise d'indices et de mesure, il commença à entrer dans les pas du forgeron, à comprendre l'agencement et l'économie des objets autour de la forge. Il put alors reconstituer non plus seulement un lieu inerte mais l'espace de travail de ce forgeron et ainsi expliquer l'usage de certains instruments liés à l'histoire de l'utilisateur ou à la fonction particulière de cette forge dédiée au ferrage des chevaux.

L'espace de travail de la géométrie sera aussi un lieu habité que l'on peut définir à partir de certaines de ses composantes mais dont le sens varie et dépend de la fonction et de l'utilisateur. Ceci nous conduira à introduire une la notion d'*espace de travail géométrique personnel* pour prendre en compte la spécificité des utilisateurs notamment lorsqu'il s'agira d'élèves.

1.4.2 Espace local et réel

Il est bien sûr difficile de préciser l'espace qui fait l'objet de la géométrie puisqu'en quelque sorte pouvoir décrire l'espace support est l'objet premier du travail du géomètre au moins comme nous l'avons vu dans la conception abstraite de la Géométrie III. Dans les autres cas, cet espace est souvent considéré comme transparent et l'utilisation même du mot espace n'a pas beaucoup de sens dans ces géométries. Dans la vision Géométrie III, l'espace est constitué de points, de droites et de plans dont les relations sont explicitées par le modèle. Ce regard permet d'introduire les sous-parties de l'espace comme des ensembles de points. En Géométrie II, certaines sous-parties de l'espace sont en fait les objets d'étude et l'on parlera de figure ou de configuration. En Géométrie I, il s'agit d'objets physiques, de dessins. Nous reviendrons (2.3.1) sur ce point classique de la didactique des mathématiques.

De fait, il est nécessaire de considérer l'espace réel comme support de la géométrie. Nous faisons notre la pensée formulée par Lechalas[14] au moment de la crise des géométries non euclidiennes.

> *Il semble que le raisonnement géométrique ait essentiellement besoin de s'appuyer sur une image car si cette image s'évanouit le concept abstrait de grandeur subsiste seul et la géométrie fait place à l'algèbre.*

Les objets géométriques sont un constituant essentiel de l'espace de travail géométrique et les différents points de vue sur leur nature exacte dépendent à la fois du modèle théorique qui les définit et de l'espace réel dans lequel ils se trouvent.

Un autre point important est la notion de localité ; l'espace auquel nous avons accès est de fait nécessairement local. Le détour par l'étude des conceptions de RIEMANN permet de mieux comprendre les liens entre la géométrie et la modélisation de l'espace. Selon lui, les hypothèses fondatrices de la géométrie résultent d'observations locales et il faut être prudent sur toute généralisation hors du champ de l'observateur. Il pose la question fondamentale de savoir si l'extension de la géométrie localement perçue comme euclidienne donne nécessairement l'espace euclidien ? C'est KLEIN qui le premier a développé et résolu le problème de décrire tous les espaces globaux qui localement étaient indiscernables de l'espace euclidien dans le cadre de sa théorie des formes spatiales. L'intérêt de ce problème vient des méthodes développées pour le résoudre. Il est, en effet, traité en faisant appel à des techniques « géométriques » qui travaillent sur l'espace entier en laissant invariantes certaines

[14] G. LECHALAS [1889] La géométrie générale in *La critique philosophique*.

propriétés. L'espace devient la matière même du travail géométrique, aidé en cela par les groupes de transformations.

1.4.3 Les artefacts

Comme il semble que ce soit l'usage en didactique des mathématiques, nous utiliserons le mot artefact dans le sens que lui donne RABARDEL[15] de chose ayant subie une transformation d'origine humaine. Il ajoute que cette chose doit être susceptible d'un usage pouvant s'inscrire dans des activités finalisées. Dans l'usage géométrique, ces choses seront les outils et les instruments utiles en géométrie. RABARDEL précise qu'un instrument est un artefact pris en main par un individu grâce à des schèmes d'action.

Les artefacts sont une composante déterminante de l'espace de travail puisqu'ils constituent la face la plus visible et la plus prégnante pour l'élève. Dans le cadre euclidien classique, on sait l'importance des constructions à la règle et au compas. La règle n'est pas graduée et ainsi la Géométrie II se différencie radicalement de la Géométrie I où la mesure peut intervenir. Ainsi le problème de la détermination de la trousse à outils est fondamental pour toute réflexion sur les problèmes géométriques et notamment, bien sûr, ceux dits de construction. L'introduction de nouveaux outils de type informatique a bouleversé les artefacts utilisés et créé, de fait, des nouveaux espaces de travail dont l'étude à la fois théorique et didactique a nourri les recherches en didactique des mathématiques. Cette dernière remarque nous permet de préciser que, dans une géométrie donnée, les espaces de travail géométriques sont multiples ; c'est une source de difficultés supplémentaires.

1.4.4 Le référentiel théorique

Les objets et les artefacts de la géométrie en constituent la partie empirique, celle-ci ne prendra tout son sens qu'articulée avec un ensemble de définitions, de propriétés, de relations réunies dans une sorte de référentiel théorique que l'on peut aussi regarder comme un modèle théorique. Le sens du mot modèle oscille entre concret et abstrait, réalisation matérielle et norme abstraite. Cette oscillation qui reflète la distinction entre les différents paradigmes que nous étudions, nécessite de préciser notre emploi du mot « modèle ». Dans ce qui suit, nous appellerons modèle théorique le modèle abstrait qui résulte soit d'une modélisation, soit d'une définition a priori.

Dans le premier cas, le modèle théorique résulte d'un processus de modélisation par schématisation et idéalisation du monde réel dont il cherche à rendre le plus fidèlement compte. Nous avons vu que la géométrie axiomatique classique entre dans cette description et qu'il est possible de donner l'origine *naturelle* de certaines propriétés de la Géométrie II.

Dans le deuxième cas, le modèle théorique préexiste et ce qu'on appelle modèle est cette fois une représentation matérielle ou virtuelle destinée à donner du sens à un

[15] P. RABARDEL [1995] *Les hommes et les technologies* Armand Colin p. 59.

système d'axiomes et d'énoncés qui est donné a priori. Il s'agit alors d'une interprétation (et souvent d'une création) qui doit rendre compte des objets et des propriétés définis par les axiomes. Le modèle matériel vient éclairer le système d'axiomes et favoriser éventuellement le développement de la théorie par le géomètre en fournissant à son intuition un cadre plus familier. La Géométrie III de type formaliste entretient ce rapport au modèle théorique. Ceci apparaît nettement dans les nombreux modèles matériels créés pour rendre compte des axiomes décrits par HILBERT, quand on ne retient pas l'axiome d'ARCHIMÈDE ou quand on nie l'axiome du parallélisme (rappelons, sans le développer, l'exemple du modèle de KLEIN pour la géométrie hyperbolique).

La Géométrie I entretient, au moins dans sa pratique élémentaire, un rapport confus à la notion de modèle. Cependant, il est possible de développer au sein de ce paradigme un modèle de référence : c'est ce qu'a fait par exemple HJELMSLEV [1939].

> *La géométrie que nous proposons dans ce qui suit doit avoir comme but le contrôle sensible de tous les résultats. Les définitions doivent être des définitions sensibles : c.a.d. décrire les objets dont on s'occupe de telle façon qu'on puisse reconnaître par une vérification directe si les objets ont les propriétés démontrées.*
>
> *Le programme de travail est : voir et concevoir.*

Dans cette géométrie, par exemple, une droite n'est pas tangente en un point à un cercle mais sur une portion de cercle. Le but de HJELMSLEV est de définir précisément cette géométrie étroitement liée au monde physique.

2. L'enjeu didactique

Dans une institution scolaire donnée, la résolution d'un problème géométrique suppose qu'un espace de travail géométrique a pu être organisé pour permettre la résolution du problème par l'élève. Cet ETG que nous qualifierons d'idoine doit nécessairement remplir deux conditions pour être efficace, d'une part, il doit permettre de travailler dans la géométrie correspondant à la problématique visée, d'autre part, il est bien construit dans le sens où ses différentes composantes sont organisées de manière valide. Son concepteur est un expert qui joue ici un rôle semblable à celui de l'architecte qui conçoit un espace de travail pour des utilisateurs potentiels futurs. Ses utilisateurs sont des individus dont le degré d'expertise est plus ou moins grand. Un écart va donc exister entre cet ETG idoine et ce que nous avons appelé un ETG personnel. Lorsque le problème sera posé à un individu réel (l'élève, l'étudiant ou le professeur), son traitement s'effectuera dans cet espace de travail qu'il importera d'étudier.

Cette façon de décrire la situation qui suit d'assez près le processus de transposition didactique, nous permet de dégager un enjeu didactique global tel que nous le percevons dans notre cadre théorique. D'un cadre géométrique unique, nous sommes passés à plusieurs cadres de référence dépendant de la Géométrie utilisée. Dans ces cadres, il est possible de résoudre des problèmes grâce à des ETG idoines différents.

A cela s'ajoute la dimension personnelle due à un individu particulier travaillant dans son ETG personnel.

S'assurer que l'apprenant réorganise les diverses composantes de son ETG en un tout cohérent et opérationnel va constituer l'enjeu didactique. Cette question assez générale peut se décliner en un certain nombre de problèmes qui participent de cet enjeu.

1. Le problème de l'existence dans l'institution scolaire d'un ETG idoine pour résoudre un problème ou plus généralement une classe de problèmes.
2. Les malentendus pédagogiques dus à la diversité des ETG de référence. Ce point a fait l'objet d'une de nos hypothèses de travail, nous le reprenons ici à partir des notions de milieu et de contrat didactique de BROUSSEAU.
3. Le problème du développement individuel de l'ETG personnel. Pour répondre à ce problème, à côté de la réflexion purement didactique, il est nécessaire d'introduire une dimension psychologique et cognitive. Nous avons pris en compte cette dimension dans nos travaux en croisant les paradigmes géométriques avec les niveaux de pensée de VAN HIELE. Nous présenterons aussi la problématique de DUVAL.

2.1 Espace de travail idoine, organisation mathématique et enseignement

La mise en place d'un espace de travail géométrique idoine est une étape essentielle pour installer dans l'institution scolaire une organisation mathématique correspondant au modèle géométrique visé. Ce problème récurrent réapparaît à chaque réforme quand celle-ci modifie une des composantes de l'ETG. Généralement ces modifications curriculaires concernent le modèle abstrait de référence.

La modification de la structuration mathématique du modèle abstrait entraîne de fait un changement de l'espace de travail de la Géométrie et si l'on ne modifie pas les artefacts et l'espace support, cet espace de travail peut se révéler inadapté ou difficile à créer. Il nous semble que l'on peut interpréter ainsi le relatif échec de l'introduction massive des transformations géométriques dans l'enseignement de la Géométrie II au Collège et au Lycée en France. Les transformations géométriques ont été introduites dans l'espace de travail classique de la Géométrie II, qu'on pourra qualifier de statique, sans le modifier de façon à faciliter la réalisation de ces transformations afin qu'elles ne soient pas seulement mentales. La création de logiciels de géométrie dynamique a tenté partiellement de combler cette lacune.

L'échec de l'introduction précoce d'un enseignement de la Géométrie III, au moment des mathématiques modernes, renvoie plutôt, si on se limite à une interprétation en termes d'ETG, au fait que les ETG de la Géométrie III se nourrissent d'une expérience préalable dans les ETG de la Géométrie II et même de la Géométrie I. Ce fait avait été négligé par certains des inspirateurs de la réforme. Il est intéressant de revenir avec le recul sur les affirmations de DIEUDONNÉ[16] dans son traité destiné aux enseignants de mathématiques et ceci pour constater qu'une réflexion épistémologique si brillante soit-elle ne dispense pas d'une étude didactique. Ainsi

[16] J. DIEUDONNÉ *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* Hermann 1964.

après avoir critiqué, la géométrie d'Euclide, jugée obsolète, DIEUDONNÉ[17] pose la question suivante.

> *Je me contenterai de poser aux éducateurs la question de savoir si, pour arriver aux meilleurs résultats, il convient de présenter aux élèves une théorie où tout s'ordonne autour de quelques idées clés très simples [...] ou au contraire de les laisser pendant des années aux prises avec une technique inadéquate et qu'il leur faudra oublier aussitôt apprise ?*

La question est intéressante et la réponse n'est pas aussi évidente que le pensait DIEUDONNÉ qui ajoute en note :

> *Les professeurs d'éducation physique, eux, n'hésitent pas quand il s'agit par exemple de natation, c'est la nage moderne, le crawl qu'ils enseignent parce que plus efficace que les nages anciennes.*

À côté de ces considérations générales, il y a aussi des problèmes simples où l'existence même d'un ETG idoine pour résoudre le problème se pose réellement. Dans certains cas, les techniques disponibles ne permettent pas de résoudre la tâche proposée ou alors de manière trop lourde.

Si l'on interprète les différentes Géométries comme des théories différentes, la recherche d'espaces de travail géométriques idoines avec des techniques justifiées va pouvoir éventuellement se développer dans le cadre d'une théorie anthropologique comme celle de CHEVALLARD. Ces théories permettent, notamment, d'étudier dans le détail les organisations mathématiques et didactiques mises à l'œuvre dans les manuels ou les programmes.

2.2 Les malentendus pédagogiques relatifs à l'ETG

2.2.1 Un exemple d'ambiguïté sur le choix de l'ETG

Les exemples sont nombreux qui montrent que le problème posé par l'enseignant n'est pas nécessairement résolu avec les méthodes et les outils auxquels il pensait. Un exemple simple et courant est celui où l'élève travaille en Géométrie I alors que l'enseignant attend une réponse en Géométrie II. Une façon aisée de vérifier la confusion des paradigmes est d'observer l'emploi des artefacts dans les problèmes. En effet, le propre de la Géométrie II est de ne recourir aux instruments de construction que pour dessiner la figure support du raisonnement. Utiliser ces instruments pour répondre aux questions n'est pas considéré comme légitime : cette différentiation distingue profondément les deux espaces de travail de la Géométrie I et de la Géométrie II. Le malentendu résulte alors du fait que l'élève mesure et construit des objets alors qu'un raisonnement purement déductif basé sur des propriétés est attendu par le professeur.

Dans le cadre de l'enseignement, il est fréquent que le problème posé aux élèves contiennent des ambiguïtés orientant l'élève non expert à utiliser un autre espace de travail que celui attendu, de manière implicite, par l'enseignant. L'exercice suivant extrait d'un article de petit x[18] est d'autant plus intéressant qu'il a été posé lors

[17] *op. cité* p. 11.

[18] I. JACQUIER Quelle conception des nombres chez des élèves de troisième *petit x n°41* 1995.

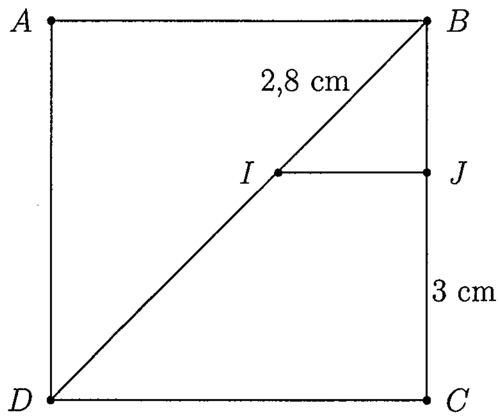
d'un examen.

Construire un carré ABCD de côté 5 cm.

1) Calculer BD.

2) Placer le point I de [BD] tel que BI=2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC=3 cm.

La droite (IJ) est-elle parallèle à la droite (DC) ?



Il s'agit des deux premières questions d'un exercice de Brevet des collèges (fin de la troisième).

Cet exercice oppose l'évidence intuitive fournie par le dessin (les droites sont parallèles) et les conclusions contraires (les droites ne sont pas parallèles) tirées de calculs utilisant à la fois des mesures et des nombres. D'autre part, suivant les nombres utilisés, les droites peuvent ou non être parallèles, comme le signale un élève de troisième : *Les droites (IJ) et (DC) sont parallèles si on prend l'arrondi, mais elles ne le sont pas si on prend la valeur exacte.*

Une des difficultés de l'exercice étudié est qu'il propose deux tentations de détour face à la tâche attendue par le professeur :

- un détour par le dessin qui consiste à travailler directement sur le dessin (une « approximation géométrique »),
- une approximation numérique non explicitée qui consiste à prendre une valeur décimale pour un irrationnel.

Ces détours correspondent en réalité à des choix de paradigmes géométriques distincts de celui dans lesquels le contrat implicite classique place les questions. De fait, le problème multiplie les possibilités de glissement de paradigmes.

2.2.2 L'éclairage de la Théorie des Situations Didactiques

Ces malentendus pédagogiques vont résulter en grande partie de la nature de la situation proposée aux élèves par l'enseignant. Aussi pensons-nous qu'il est utile d'envisager la question de ces malentendus dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques de BROUSSEAU, de manière à voir le rôle joué par le milieu et le contrat didactique dans cette confusion entre les paradigmes qui se manifeste par l'utilisation d'ETG non adaptés.

Nous poserons le problème de la relation des ETG avec le milieu et le contrat didactique en ces termes :

Q1. Quel lien existe-t-il entre l'ETG et le milieu ?

Q2. Les changements de paradigmes ne sont-ils gérables que par des changements de contrat didactique ?

Pour avancer dans ces questions, nous présentons ce que nous retenons, pour notre étude, du milieu et du contrat.

La Théorie des Situations Didactiques de BROUSSEAU pose à son utilisateur potentiel de nombreux problèmes dus au fait que si elle repose de manière nette sur un certain nombre de notions bien définies et bien repérables, comme les situations ou les obstacles, elle utilise aussi des concepts essentiels d'un point de vue formel pour la théorie mais curieusement assez mal définis par BROUSSEAU lui-même qui préfère souvent les aborder par le biais d'exemples ou de schémas puis par expansion de la notion qui devient de plus en plus raffinée. Il en est ainsi des deux notions étroitement liées à nos préoccupations : le milieu et, dans une moindre mesure, le contrat didactique. Ainsi, dans le cas de la notion de milieu, notion essentiellement systémique, l'approfondissement passe par une description qui introduit des milieux différents qui serviront tantôt à définir le travail de l'élève, tantôt celui du maître (MARGOLINAS 2002).

La notion de milieu chez BROUSSEAU apparaît comme une notion suffisamment générale pour englober tout ensemble (précisément tout système) interagissant avec un élève autour de la mise en jeu d'un savoir. L'emploi du mot jeu n'est pas neutre car on sait l'importance de cet aspect dans la perception de la didactique chez cet auteur. Dans l'ouvrage de synthèse sur la Théorie des Situations Didactiques coordonné par BALACHEFF [1998], BROUSSEAU donne le diagramme suivant[19] pour illustrer les relations entre les divers protagonistes d'une situation d'enseignement et la place du milieu.

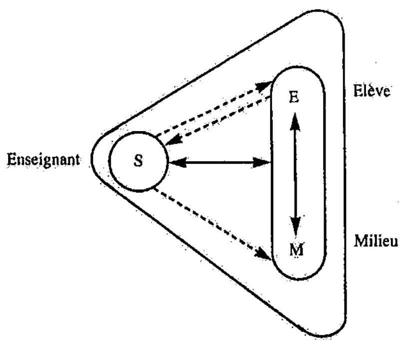


Figure 2.3 - Le milieu

La conception d'un apprentissage constructiviste sous-tend le processus d'enseignement. Les problèmes mettant en jeu le savoir visé (désigné par S dans le diagramme) sont proposés à l'élève par l'enseignant et deviennent des situations qui doivent permettre une interaction riche entre un élève et le milieu d'apprentissage. Dans cette approche, la réflexion épistémologique a priori sur le savoir visé est essentielle, elle doit notamment permettre de dégager des situations fondamentales qui seront des situations adidactiques de référence.

[19]p. 92.

Chez BROUSSEAU, cette première interaction entre un élève et un milieu relève souvent d'une analyse fine de la nature du savoir visé qui est accessible par le biais de problèmes. Nous retrouvons ici l'entrée dans le paradigme par l'intermédiaire de situations paradigmatiques pouvant, au niveau de l'enseignement, être considérées comme des situations fondamentales.

De notre point de vue, en intégrant les situations dans notre réflexion, nous pouvons dire que lorsqu'un problème ou une situation géométrique sont donnés à un individu, il se crée de fait une interaction entre un milieu et l'individu.

L'interprétation et la représentation du problème pour sa résolution entraînent l'entrée dans un paradigme géométrique puis le recours à un ETG dont la nature peut dépendre de l'utilisateur. Une analyse épistémologique fournit un ETG idoine, adapté théoriquement à la nature du problème.

De fait, dans l'analyse de BROUSSEAU ce premier niveau d'analyse renvoie à la constitution d'un premier milieu que BLOCH [2002] qualifie d'épistémologique. Dans le cadre d'une situation didactique, lorsque l'individu générique devient un individu particulier, la confrontation fait apparaître un milieu empirique (ou expérimental s'il est maîtrisé par observateur). Dans notre étude, nous en resterons à ce niveau de milieu. Le milieu dépend de la situation alors que l'ETG est une référence indépendante d'une situation donnée qui renvoie de fait à un savoir mathématique général, dans notre cas la géométrie. Comme le note SALIN [2002], BROUSSEAU a élargi sa théorie en introduisant les agrégats de connaissances et de situations qui pourront participer plus globalement de la constitution du savoir mathématique. Dans notre conception, cela s'insère dans la construction du paradigme de référence et des ETG associés.

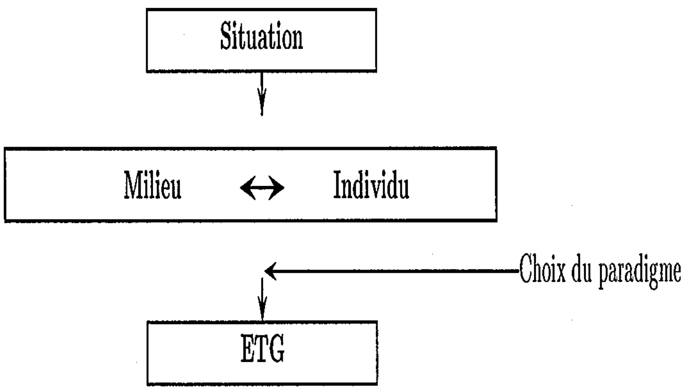


Figure 2.4 - Le milieu et l'ETG

Lorsque l'individu cesse d'être générique, il apparaît alors au moins deux nouveaux ETG, celui du professeur (l'ETG attendu pour résoudre le problème en situation scolaire) et celui de l'élève.

Deux niveaux d'analyse didactique sont alors possibles qui vont éclairer nos deux questions Q1 et Q2. Le premier niveau, en relation avec la question Q1 sur le milieu et l'ETG , doit déterminer si, tel qu'il est posé, le problème fournit un ETG adapté à la résolution de ce problème. Pour le savoir, il faut étudier le milieu épistémologique proposé à l'élève.

Le second niveau étudie l'écart entre l'ETG du professeur et celui de l'élève. Comme nous l'avons vu, l'interprétation du problème dans le cadre géométrique idoine dépend en grande partie du choix par l'élève du paradigme attendu. La grande question porte sur la méthode utilisée par l'enseignant pour que l'ETG de l'élève soit celui qui est attendu par le professeur, en d'autres termes comment s'effectue la dévolution du problème pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur le jeu géométrique. Nous sommes évidemment en plein dans une négociation de contrat didactique au sens de BROUSSEAU. Nous allons envisager ces deux niveaux d'analyse.

2.2.3 Environnements spatio-graphiques, milieu et ETG

Une partie des composantes de l'ETG est située dans le milieu proposé à l'élève, une autre relève plutôt de ses choix et de ses connaissances. Quant au professeur, responsable de la situation et de la mise en place d'un milieu dans le cas d'une situation didactique, il va souvent pouvoir agir sur des environnements constitués du couple espace-artefact généralement qualifiés d'espaces spatio-graphiques. Deux environnements se présentent comme des espaces de travail géométriques en puissance. L'un classique est celui qu'on a coutume de désigner sous le terme d'environnement papier-crayon, l'autre est apparu plus récemment avec la création en informatique de logiciels spécifiques et renvoient partiellement à l'idée de micromondes.

Dans le cas de l'environnement papier-crayon, les artefacts sont les instruments traditionnels de construction utilisés sur une feuille de papier plongée dans le micro-espace. La justification de l'emploi de cet univers particulier provient de l'importance accordée en géométrie aux problèmes de construction. Ces problèmes n'auront pas la même fonction en Géométrie I et en Géométrie II. Cette distinction est d'ailleurs clairement repérée par l'existence de deux termes différents : la construction et la constructibilité. L'importance des problèmes de construction dans la géométrie classique est due au rôle de théorèmes d'existence qu'elle tient dans cette géométrie ; pour pouvoir parler d'une perpendiculaire à une droite issue d'un point, il faut avoir prouver son existence et une façon de le faire est de la construire. Les ouvrages classiques, comme celui de BERTRAND[20], établissent clairement cette problématique. Ils définissent ensuite le lieu où doit s'exercer l'activité du géomètre pour résoudre ces problèmes :

> *Mais laissant ces réflexions sur la méthode, je dois dire un mot des moyens qu'on est supposé avoir en main pour résoudre les problèmes. Ces moyens se réduisent à un Plan, une Règle, un Compas et une Plume ou un Crayon. Un plan pour y tracer les figures, une règle pour diriger la plume en ligne droite, un compas pour faire marcher un crayon circulairement. D'où il paraît que le plan est proprement le lieu ou le champ des problèmes et que les moyens de solution se réduisent au cercle et à la ligne droite.*[21]

[20] BERTRAND L. (1778) *Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques* Genève.

[21] *op. cité* p. 78.

Grâce aux choix des problèmes et à sa gestion de l'environnement, l'enseignant joue sur la nature du milieu. Celui-ci peut être constitué par l'ensemble des figures planes, comme l'a souligné FREGONA [1995], ou par des variations sur le support matériel. Par exemple, le problème peut faire jouer à la feuille de papier un rôle différent qui fait basculer de la Géométrie I à la Géométrie II. Considérons le problème désormais classique où l'élève doit tracer la droite qui joint un point M au point d'intersection de deux droites (d1 et d2) tracées sur la feuille de papier : les deux droites se coupent en dehors de la feuille. Dans quelle Géométrie se situe cet exercice et quel est son espace de travail ? Pour nous, cet exercice introduit une rupture par rapport au champ habituel de la Géométrie II, puisqu'on ne peut pas modifier la figure pour l'ajuster à la feuille. Et un des postulats de base de la Géométrie II est qu'il est toujours possible grâce à une similitude de ramener le problème dans un espace aussi petit que l'on veut donc sur une feuille de papier. L'espace de travail de la Géométrie II, plastique et déformable à souhait, peut ainsi se réaliser sur cette feuille particulière. Si, au contraire, la feuille de papier reste rigide, nous sommes dans un autre espace de travail : celui de la Géométrie I.

L'introduction des ordinateurs et des logiciels a permis de développer des environnements créant de fait de nouveaux espaces de travail. Ces ETG se réfèrent aux mêmes géométries mais changent radicalement le rapport au modèle. Dans le cas des micromondes, ils intègrent le modèle dans leur fonctionnement. L'idée de ce terme et surtout le concept qui lui est associé remonte à PAPPERT au début des années 70 pour développer LOGO. Pour CAPPONI et LABORDE[22] :

> *Un micromonde est une création d'un monde de réalités artificielles fournissant un modèle (au sens des logiciens) d'une théorie. Ce monde comporte des objets sur lesquels on peut agir grâce à des actions, on peut aussi créer de nouveaux objets.*

Dans le cas de Cabri, les deux auteurs ajoutent que ces objets, les Cabri-dessins, *résistent aux manipulations de l'individu en suivant des lois de la géométrie.* Ces lois sont présentées comme étant *grosso-modo celles de la géométrie euclidienne.*

L'ambition est donc bien plus grande que dans l'environnement papier-crayon, car cette fois le modèle abstrait est pris en compte dans l'environnement lui-même, il s'agit presque d'ETG clés en main. Il ne reste plus qu'à l'utilisateur à apprendre à les utiliser. Le travail de l'enseignant devient essentiel dans ce travail d'appropriation à la fois pour développer l'ETG de l'élève mais aussi pour qu'il puisse raisonner dans la Géométrie souhaitée. En effet, par leur facilité d'emploi pour créer des objets, les outils informatiques favorisent l'instauration d'un ETGI plutôt qu'un ETGII : ils fournissent la construction validante. La mise en place d'une réflexion en terme de milieu devient cruciale pour interpréter les diverses activités élaborées dans un environnement informatique.

[22]B. CAPPONI et C. LABORDE Modélisation à double sens *Actes de la VIIIe Ecole d'été de didactique des mathématiques.* (1995) p. 265

2.2.4 Le contrat didactique et le choix d'ETG

Dans la pratique de la classe, la gestion de la bonne interprétation du milieu pour résoudre un problème s'analyse souvent en terme de rapport à la géométrie alors que pour nous il s'agit plus d'un changement de géométrie. Les éléments utilisés pour la négociation du contrat didactique reposent fondamentalement sur le niveau de la classe où le problème est posé voire même le chapitre du livre où il peut se trouver. D'autre part, des phrases clés comme « en troisième on n'a plus le droit d'utiliser sans justification ce qu'on voit sur la figure » ou plus brièvement « la figure n'est pas une preuve », ces phrases donc permettent d'articuler le changement de contrat autour du statut de la figure comme élément central. Ces injonctions naturelles pourront s'avérer contre-productives dans la recherche de la solution.

De même, la mise en place du paradigme de la Géométrie II passe, en France, par une insistance forte sur la production assez formelle de démonstrations qui privilégient, dans l'ETG, le recours au registre discursif. Ce point relevé dans de nombreuses études comparatives[23] avec les pratiques d'autres pays nous a particulièrement frappé dans l'étude des pratiques d'enseignants de Collège autour du Théorème de PYTHAGORE avec un travail important et préalable sur la contraposée ou la réciproque. Cette importance du discours démonstratif fait basculer l'ETG du côté de la théorie et appauvrit le pôle intuitif : pour parler un langage du XVII^{e} siècle il s'agit plus de développer un art de la démonstration qu'un art de l'invention.

D'autre part, diverses études dans la filiation des travaux de BERTHELOT et SALIN [1992] ont montré la prééminence d'une gestion ostensive des problèmes de géométrie.

Le contrat didactique ainsi mis en place s'appuie très fortement sur des situations didactiques sans préparer l'apprentissage à d'autres types de situations. Ceci explique la faiblesse du raisonnement géométrique dans le cas de situations adidactiques et aussi lorsque les effets de contrat seront moins prégnants ou oubliés comme en formation des enseignants.

À côté de cette gestion de l'évolution de la pensée géométrique, nous avons posé comme hypothèse qu'une explicitation du jeu entre les paradigmes était nécessaire pour le professeur et que son incorporation explicite dans la gestion du contrat didactique avec l'élève pouvait être un élément facilitateur dans la compréhension des diverses problématiques géométriques. Pour réduire cette part d'implicite, le jeu sur la nature des artefacts permet de dégager plusieurs propositions de preuves dont la validité doit être discutée par rapport aux enjeux paradigmatiques et par rapport à la problématique privilégiée : technologique, axiomatique ou logique.

Un des objectifs de notre recherche est la mise en place graduelle d'un milieu jouant sur ces diverses problématiques pour favoriser ce jeu entre les divers cadres géométriques associés à nos trois géométries. C'est notamment le but de nos Petites Provocations Didactiques.

[23]Voir par exemple KNIPPING [2002].

2.3 Le développement de l'ETG personnel

Dans les faits, l'ETG personnel de l'élève ne fonctionne pas nécessairement comme l'ETG de référence. En effet, ce dernier ne surgit pas tout fait dans le cerveau de l'utilisateur, il est le fruit d'un long apprentissage qui met en place les différents schèmes d'action assurant la cohérence de l'ETG. D'autre part, l'élève peut rencontrer des difficultés dans son usage ou faire des erreurs comme dans tout apprentissage.

Nous avons vu précédemment l'importance du choix du milieu et des situations visant à la structuration de cet ETG. L'enseignant va devoir travailler pour que les artefacts deviennent des instruments au sens de RABARDEL, pour que les divers objets de l'espace étudié deviennent familiers à l'élève et pour qu'enfin les éléments du modèle théorique puissent se structurer autour de ces objets. Mais en plus de cette entrée classique en didactique des mathématiques, le développement personnel de l'ETG suppose aussi que l'on envisage le problème dans sa dimension psychologique et cognitive. Les voies proposées ici sont évidemment très diverses et dans notre étude nous n'avons envisagé que deux pistes qui avaient déjà fait l'objet de nombreux travaux en didactique des mathématiques. Il s'agit d'une part de l'aspect sémiotique avec la notion de registre de représentation sémiotique particulièrement féconde pour traiter d'une Géométrie articulée autour des figures. L'autre aspect que nous avons pris en compte est celui des niveaux de pensée de VAN HIELE qui bénéficie d'un grand nombre d'approches surtout dans les mondes anglo-saxons et hispaniques.

2.3.1 Registres sémiotiques et ETG

Les études didactiques portant sur l'enseignement de la géométrie au Collège ont conduit à la nécessité de complexifier la notion de figure. Pour les élèves de Collège, la figure peut soit être un support du raisonnement, soit par son existence même la preuve cherchée. Ce double regard sur un même objet a conduit les didacticiens à tenter de distinguer par des mots ce que l'usage confond et à la suite de PARZYSZ, la distinction dessin-figure est devenue classique. Dans notre approche, la définition de la figure dépend du paradigme géométrique de référence. En Géométrie I, il s'agit d'un dessin ou pour emprunter une expression allemande une figure géométrique réelle *(geometrische Realgebilde)*. Cette formulation insistante porte sur deux aspects : le contexte fait que les dessins doivent être interprétés de manière géométrique (il ne s'agit pas d'art, de physique...), mais d'autre part ces objets ne sont pas des objets idéaux, ils sont réels : les traits ont une épaisseur, les outils de construction sont de vrais outils avec leur frottement, leur usure, leur imperfection, leurs pannes. En Géométrie II, du fait de la distance au réel, l'importance de la définition devient essentielle. La figure n'existe alors pas sans un texte qui la définit et qui en fixe les limites. En Géométrie II, le seul objet physique est le dessin, mais un dessin « *controlled by its definition (though it may be inspired by a real object)* » comme le formule FISCHBEIN [1993] qui introduit l'idée de « figural concept » pour rendre compte de la nouvelle notion de figure.

En Géométrie III, la figure correspond à un sous-ensemble de points de l'espace, pour certains il s'agit même de tout ensemble fini de points. Elle est aussi une réification d'une idée abstraite associée à des espaces au moins de dimension 2. Elle peut alors heureusement guider l'intuition du géomètre.

Le changement de statut de la figure est un des points les plus visibles dans l'évolution de l'ETG. Sa prise en charge est possible par la gestion des artefacts, notamment les logiciels géométriques dynamiques. Le jeu sur la figure s'articule aussi sur la liaison espace-modèle dans l'ETG et donc sur la relation entre le spatial et le théorique : préciser la gestion de cette interaction est l'objet de l'approche cognitive de DUVAL. Pour cela, il introduit un travail spécifique, encore un jeu, sur les registres de représentation sémiotique que sont le registre figural et le registre discursif. La connaissance du jeu entre ces deux registres est certainement un des enjeux de l'apprentissage de la Géométrie II.

D'autre part, nous allons montrer sur cet exemple, comment une approche cognitive peut venir se superposer à l'espace de travail géométrique. Ce dernier résulte d'une réorganisation des processus cognitifs associés aux diverses composantes de l'ETG. Dans son article « Why to teach geometry ? »[1995], DUVAL introduit trois processus cognitifs.

- Le processus de visualisation lié aux figures mentales ou sur un support matériel.
- Le processus de construction dépendant des outils utilisés (règles, compas...).
- Le processus de preuve articulé sur un discours théorique.

Il réorganise ensuite ces trois processus dans un schéma que nous superposons sur celui de notre espace de travail (les flèches sont de DUVAL).

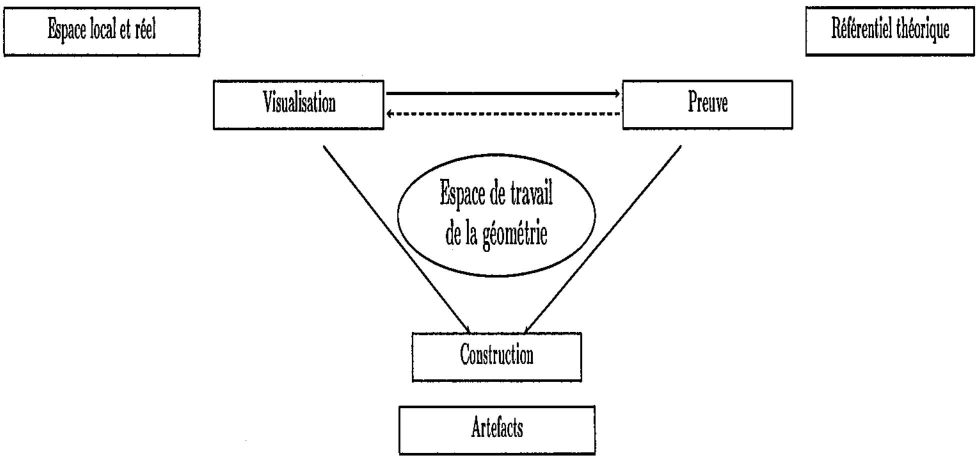


Figure 2.5 - Processus cognitifs et ETG

Ce modèle doit être vu de façon dynamique pour saisir l'évolution du processus cognitif lié au travail géométrique.

2.3.2 Articulation entre niveaux de pensée géométriques et paradigmes

En s'appuyant, d'une part sur la théorie de PIAGET et d'autre part sur la GestaltTheorie, VAN HIELE a construit une théorie du développement de la pensée géométrique chez l'enfant basée sur les différents niveaux d'appréhension perceptifs et logiques des figures. L'élève passe idéalement par cinq niveaux (numérotés de 0 à 4) qui le conduisent de la perception simple à une conception abstraite et discursive de la géométrie. Les deux premiers niveaux (visualisation et analyse) se distinguent ainsi des deux derniers (déduction formelle et abstraction). Le niveau 2 (déduction informelle) correspond à une phase de transition où s'élabore le raisonnement géométrique.

Pour être clair, nous récapitulons en quelques mots les niveaux de pensée définis par VAN HIELE [1986][24] :

- Le niveau 0 est un niveau visuel. Des figures géométriques sont reconnues par leurs formes ; l'élève reconnaît la forme externe, mais ne peut pas justifier ses affirmations. VAN HIELE parle de « la pensée spatiale ».
- Le niveau 1, niveau descriptif. Les propriétés des figures permettent de les reconnaître. L'élève commence à maîtriser un réseau de relations autour de ces objets. VAN HIELE parle de « la pensée spatiale géométrique ».
- Le niveau 2, niveau déductif informel. Le troisième niveau est un niveau théorique qui étudie des relations logiques entre les propriétés des figures. Ce niveau a besoin d'un nouveau type d'expression plus discursif et basé entre autres sur des définitions. VAN HIELE parle de « la pensée géométrique mathématique ».
- Le niveau 3, niveau déductif axiomatique. Dans ce niveau se développe une étude de la nature de relations entre certains théorèmes à l'intérieur d'une théorie axiomatique. VAN HIELE parle de « la pensée mathématique logique ».
- Le niveau 4, enfin, niveau structurel. Des structures axiomatiques différentes sont comparées entre elles, d'autres types de géométries sont envisagés.

Cette conception de l'évolution de la pensée géométrique gravissant les pentes de l'abstraction et de la généralisation par les structures, rend compte du passage vers les mathématiques évoluées définies entre autres par TALL[25] [1995].

Nous n'entrerons pas ici dans la discussion pour savoir s'il s'agit vraiment du développement cognitif réel de l'élève. Pour nous, l'intérêt de cette approche, articulée chez VAN HIELE avec une progression pédagogique, est d'avoir développé des observables portant sur des activités faciles à mettre en place et qui suivent le développent de la pensée mathématique. Cela, et ce n'est pas sans un certain nombre de dérives, a permis de mettre en place des tests servant à déterminer le niveau atteint par les élèves. Nous ne reprenons pas ici cette hiérarchisation dans l'optique de classer les élèves et ceci d'autant plus que nous l'utilisons plutôt pour étudier des travaux d'étudiants qui ont déjà parcouru tout le cursus scolaire.

Nous proposons une vision bidimensionnelle des relations entre ces niveaux et nos paradigmes que tente de résumer le tableau suivant.

[24]Nous utilisons la désignation classique des niveau de 0 à 4 et non celle qui figure dans cet ouvrage.

[25]Voir aussi l'idée des degrés de conceptualisation introduite par DORIER dans son étude de l'enseignement de l'algèbre linéaire (1997).

Tableau de Synthèse

<table>
<tr><td></td><td>Géométrie I</td><td>Géométrie II</td><td>Géométrie III</td><td></td></tr>
<tr><td>Niveau 0
Visualisation</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">pôle
empirique
(intuition et
expérience)</td></tr>
<tr><td>Niveau 1
Analyse</td><td></td><td></td><td>Outil heuristique</td></tr>
<tr><td>Niveau 2
Déduction
informelle</td><td colspan="2">Transition</td><td></td></tr>
<tr><td>Niveau 3
Déduction
démonstration</td><td></td><td colspan="2">Transition</td><td rowspan="2">pôle théorique
(raisonnement
déductif)</td></tr>
<tr><td>Niveau 4
Abstrait
Structure</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Horizon
technologique</td><td>Horizon
axiomatique</td><td>Horizon
formel</td><td></td></tr>
</table>

Comme nous l'avons déjà souligné, dans notre perspective, les géométries se différencient, entre autres, par le fait qu'elles ne poursuivent pas le même objectif à long terme et qu'elles ont des horizons de préoccupations différents : un horizon technologique pour la Géométrie I, un horizon axiomatique lié à la modélisation pour la Géométrie II et enfin un horizon formel et logique pour la Géométrie III.

Dans sa forme la plus élaborée, chaque Géométrie suppose de la part d'un utilisateur expert une maîtrise de tous les niveaux de VAN HIELE. Les théories de l'approximation développées au début du XX^{e} siècle pour étudier les dessins de la Géométrie I en sont un exemple, de même la théorie de HJELMSLEV qui axiomatise cette Géométrie. Ces conceptions savantes et abstraites de la Géométrie I sont occultées dans la scolarité mais elles continuent à faire l'objet de travaux théoriques. Nous insistons sur ce fait pour bien affirmer qu'il n'y a pas de hiérarchie naturelle et unique entre ces diverses géométries et la voie scolaire rend compte d'un choix à la fois politique et scientifique. Nous avons grisé la voie privilégiée dans le cadre des mathématiques enseignées et qui associe niveau de pensée et un certain type de géométrie.

Une façon linéaire de comparer le développement scolaire éventuel des géométries et des paradigmes est la suivante (et nous suivons ici une idée de PARZYSZ (12)). Nous avons ajouté une colonne intégrant une problématique spatiale dans une sorte de pré-géométrie (PG).

L'approche en termes de problématiques rappelle celle développée par BERTHELOT et SALIN[26] et une reformulation de ces diverses questions à partir de la notion

[26]Ces travaux insistent notamment sur les problèmes de modélisation

d'ETG nous semble une voie de recherche intéressante à explorer[27].

Type de géométrie	PG	GI	GII		GIII
Niveaux de Van Hiele	Niveau 0	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
Problématique	Spatiale	Spatio-géométrique	Géométrico-mathématique	Logico-mathématique	Structuraliste

Tableau 2 - Un développement scolaire possible

Notre tableau à double entrée suggère des jeux complexes entre les divers paradigmes qui s'éclairent les uns les autres. Ces jeux maîtrisés par un expert permettent de résoudre différents problèmes. La mise en place et la reconnaissance de ces différents paradigmes dans le cadre de la formation des enseignants constitue un de nos objectifs.

2.3.3 Étudier le développement de l'ETG personnel

La spécificité de la géométrie élémentaire fait rencontrer un monde idéal avec un monde matériel par l'intermédiaire des objets géométriques. L'espace de travail de la géométrie précise cette rencontre et l'explicitation de cet espace facilite, selon nous, le travail d'analyse didactique de l'enseignement de la Géométrie. La détermination a priori d'un espace de travail idoine ne dépend pas que de la simple donnée du modèle géométrique. Elle suppose une réflexion sur une réorganisation didactique des composantes de cet espace de travail qui devra résulter d'un équilibre réussi entre de multiples contraintes. Faute de cela, un espace de travail mal conçu peut ne pas fournir à l'élève les outils efficaces pour agir et travailler géométriquement.

D'autre part, quand l'élève découvre son espace de travail il aura tendance à écraser le pôle modèle pour se replier sur le dipôle espace-artefact plus évident et matériel. Le rôle de l'enseignant consistera à développer ce pôle modèle en précisant l'espace de travail le mieux adapté à la tâche qu'il propose aux élèves. Cela suppose qu'il ait lui-même une conscience claire de la nature de l'espace de travail géométrique et cela nous renvoie à des problèmes de formation d'enseignants.

Enfin, nous avons aussi montré la nécessité d'envisager les difficultés spécifiques dues au développement cognitif indispensable à la maîtrise de l'ETG personnel. D'une part, il faudra étudier les difficultés spécifiques attachées aux processus cognitifs comme la visualisation, la preuve et la construction. D'autre part, les recherches devront aussi prendre en compte l'évolution de l'élève vers l'abstraction à travers les niveaux de pensée géométriques et les divers degrés de conceptualisation.

Ainsi, il nous semble que la notion d'espace de travail géométrique permet que l'approche épistémologique rencontre l'approche psycho-cognitive dans une perspective didactique.

---

[27] Nous reprenons ici une suggestion de J.L. Dorier.

Deuxième transition
Retour sur la formation des enseignants en géométrie

Le cadre développé autour de la géométrie enseignée, résulte d'une approche à la fois théorique et pratique. Nous terminerons cette présentation de nos travaux en l'éclairant par un certain nombre d'exemples. En effet, nous avons plutôt insisté sur l'origine théorique de notre construction alors que nous avons bâti ce cadre en étroite relation avec des études de problèmes, de questionnaires, de manuels scolaires, des programmes officiels et de situations d'enseignement. En fait, notre cadre a évolué en fonction des résultats obtenus dans les diverses analyses précédentes. Le cadre sert à expliquer des phénomènes qui en retour le modifient et le font évoluer. Ceci est particulièrement vrai pour le Tableau de Synthèse (p. 36) qui joue un rôle essentiellement heuristique destiné à visualiser certaines relations potentielles entre les paradigmes et les niveaux de pensée géométriques.

Parmi tous les usages possibles de notre cadre, nous avons choisi d'illustrer ses possibilités dans le champ de recherches qui nous occupe depuis le début, celui de la formation initiale des enseignants, principalement ceux du premier degré. Ce cadre a été en partie mis au point pour répondre à notre question (p. 11) sur les conceptions de la géométrie enseignée. D'une certaine manière, il constitue l'ensemble des prémisses théoriques utiles pour aborder la deuxième partie de notre interrogation telle que nous l'avions alors formulée :

> Quelles stratégies utiliser en formation des maîtres pour enseigner cette conception de la géométrie ?

Cependant, à la lumière de notre étude, il est clair que la question a évolué puisque nous envisageons désormais la géométrie élémentaire comme éclatée entre différents paradigmes tous légitimes mais dont la pertinence dépend de l'horizon visé. Nous privilégions ainsi plutôt une approche dynamique de cet enseignement basé sur un jeu dialectique entre diverses conceptions : une sorte de jeu interparadigmes. Il ne s'agit donc pas de réfléchir à une didactique fondée sur la recherche d'une voie royale d'accès à la géométrie conçue comme statique et univoque.

Nous posons comme principe de travail que les outils que nous avons développés peuvent être utiles pour la formation des enseignants car ils introduisent de manière explicite des éléments de compréhension du jeu entre les paradigmes. Cela nous permet de formuler de manière plus précise l'objet de notre question telle qu'elle se présente désormais :

> Comment sensibiliser les enseignants aux distinctions épistémologiques que nous avons dégagées ? Comment favoriser le détour réflexif, le pas de côté, nécessaire au géomètre et au formateur de géomètres ?

Notre étude des stratégies nous a conduit à envisager des situations qui, sur un temps court, tentent de susciter chez les étudiants ce pas de côté qui leur permet de réorganiser leurs connaissances pour mieux comprendre leur métier. Nous avons appelé PPD, Petites Provocations Didactiques (p 28), des situations de formation relativement brèves, s'appuyant sur un contenu mathématique, et qui doivent surprendre suffisamment les étudiants pour les conduire à interroger leurs conceptions sur certains domaines des mathématiques. Les situations en question doivent permettre de lever certaines ambiguïtés propres à la formation des maîtres. Dans l'optique qui est la nôtre, elles doivent plus particulièrement :

> Favoriser la reconnaissance par les futurs enseignants des différentes géométries.
>
> Jouer sur certaines composantes de l'ETG pour en favoriser l'expression et l'utilisation.

De plus, la recherche doit aussi tenter de déterminer dans quelle mesure les situations proposées atteignent leur objectif.

LE JEU DES PARADIGMES DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

1. Les paradigmes effectifs de l'enseignement scolaire

Le premier point à clarifier avant d'envisager la formation spécifique des enseignants est celui de la nature de la géométrie mise en jeu dans le cursus scolaire standard. En effet, les règles du contrat institutionnel qui fixe la formation, imposent le contenu de la géométrie. Des géométries intéressantes, voire fondamentales, comme les approches intrinsèques locales ou la géométrie de la sphère, ne peuvent être ainsi que marginalement traitées.

Une étude des programmes actuels montre que la Géométrie I et la Géométrie II prédominent dans l'enseignement obligatoire. A la fin de la seconde, pour les élèves qui continuent à faire des mathématiques dans une filière scientifique, se met en place une transition vers la Géométrie III articulée autour du cadre vectoriel et du cadre cartésien. De plus, tout au long de la scolarité, une insistance claire est portée sur les règles de fonctionnement logique, notamment à partir de la classe de quatrième. Dans l'enseignement français, la géométrie semble le vecteur privilégié de l'initiation au raisonnement. Cependant, et c'est là une caractéristique de l'enseignement actuel, le travail d'axiomatisation reste implicite et parcellaire. Il se construit autour d'îlots que l'on peut voir comme des ETG partiels relativement cohérents mais qui ne rendent compte que d'une partie de la Géométrie étudiée. De même, la Géométrie I n'est pas franchement abordée puisque le raisonnement déductif de type expérimental n'est pas assumé. Cette Géométrie se présente comme une première découverte de vocabulaire et de techniques avec l'usage de certains outils. Il se produit ici un écrasement sur le dipôle espace-artefact : l'ETG se réduit alors à un environnement pratique sans connaissances théoriques.

Dans le cadre de la formation des professeurs d'école, nous pouvons donc simplifier notre approche en nous limitant au jeu (GI|GII). La place de la Géométrie III ne sera que marginalement prise en compte.

Ainsi, pour nous, rendre expert le futur enseignant supposera qu'il possède les deux compétences suivantes :

1. Une claire conscience de l'existence et de la distinction entre la Géométrie I et la Géométrie II, associée à une maîtrise de chacun des ETG.

2. La maîtrise du jeu (GI|GII). Pour cela, l'enseignant doit comprendre le rôle de la Géométrie II pour contrôler les résultats de la Géométrie I. Surtout, il doit évaluer le type d'ETG le mieux adapté à l'horizon du problème posé (technologique ou axiomatique).

Les situations de formation doivent viser cet objectif. Mais, elles doivent aussi intégrer le fait qu'avant d'être expert, l'étudiant n'est peut-être qu'un débutant qui découvre la géométrie. Il peut aussi s'agir d'un individu qui maîtrise suffisamment la géométrie mais sans le degré d'expertise qui donne le recul nécessaire par rapport aux problèmes.

2. L'imparfait Espace de Travail Géométrique des professeurs d'école

Comme nous l'avons déjà signalé, il est courant que des élèves de collège résolvent en Géométrie I, un problème situé pour l'enseignant en Géométrie II. Cette remarque nous conduit à envisager la réaction des futurs professeurs d'écoles confrontés à des problèmes de géométrie et à formuler la question suivante :

> Q1. Que se passe-t-il au niveau des étudiants, futurs enseignants? Le même effet est-il constaté?

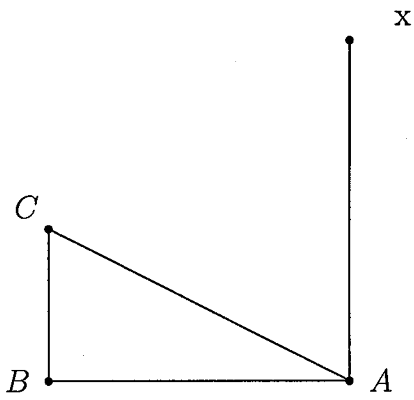
Autrement dit, dans leur usage personnel, les étudiants confondent-ils aussi les paradigmes? De la même façon, les élèves utilisent des niveaux de pensée très variés et certains n'entrent pas dans le jeu déductif caractéristique du Niveau 2 de VAN HIELE et, plus généralement pour nous, de l'entrée dans la géométrie. D'où la question :

> Q2. Constate-t-on le même effet chez les étudiants?

Cette fois, l'interrogation porte sur une maîtrise de l'ETG utilisé par les étudiants. De fait, la réponse à ces deux questions est positive. Une façon aisée de vérifier la confusion des paradigmes est d'observer l'emploi des artefacts dans les problèmes notamment ceux qui sont posés dans l'épreuve de mathématiques du concours que passent les étudiants pour devenir professeur. En effet, le propre de la Géométrie II est de ne recourir aux instruments de construction que pour dessiner la figure support du raisonnement. Utiliser ces instruments pour répondre aux questions n'est pas considéré comme légitime : cette différentiation distingue profondément les deux espaces de travail de la Géométrie I et de la Géométrie II.

Considérons par exemple ce problème posé à Amiens (2000).

> On donne le triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 4cm$ et $BC = 2cm$. La demi-droite $[Ax)$ est perpendiculaire à la droite (AB). M est un point de la demi-droite $[Ax)$. Le but de ce problème est d'obtenir des configurations particulières du triangle AMC
>
> Question 5.b. Existe-t-il un point M tel le triangle ACM soit équilatéral? Justifiez.



Voici, par exemple, ce qu'un étudiant[28] a répondu à cette question.

Pour savoir si le triangle ACM est équilatéral, on peut essayer de construire ce triangle sur la figure à l'aide du compas. On place la pointe du compas en A et on prend une ouverture équivalente à la valeur AC, on trace l'arc de cercle sur la demi-droite [Ax). On procède de la même manière en mettant la pointe du compas en C. On se rend compte que le sommet n'est pas sur [Ax) donc le triangle n'est pas équilatéral.

La construction effective avec les outils répond par la négative à la question posée et ceci grâce à l'utilisation du compas. L'étudiant n'en reste pas là et il éprouve le besoin de justifier cette première information. Mais au lieu de basculer dans la Géométrie II, il écrit :

Ceci peut s'expliquer par le fait que dans un triangle équilatéral, les angles sont égaux et leur somme vaut 180°. Chacun vaut 60°. Dans ce cas lorsqu'on mesure grâce à un rapporteur, on remarque que $\widehat{CAM}$ *est supérieur à 60°,* $\widehat{CAM} = 64°$.

Dans ce cas, la mesure avec instrument permet de conclure et, cette fois, sans construction. Le raisonnement développé ici donne un exemple de déduction dans le cadre de la Géométrie I. La déduction s'appuie sur un certain nombre de propriétés utiles dans le cadre pratique et qui détermine l'expérience conclusive. Cet exemple nous fournit aussi l'occasion de vérifier que certains des étudiants qui se placent ainsi dans le cadre de la Géométrie I, maîtrisent parfaitement les règles du raisonnement déductif propre au Niveau 2 et, parfois, au Niveau 3 de VAN HIELE. Ces niveaux de pensée ne vont pas toujours être aussi bien maîtrisés. Ainsi, dans le problème de Charlotte et Marie, sur lequel nous reviendrons plus loin (fig 3.1 p. 47), il est demandé de justifier le fait qu'un quadrilatère est un losange. Voici ce que répond un étudiant :

OELM est un losange car :

-ses quatre côtés sont égaux

[28]Toutes les réponses présentées ici sont données par des étudiants de Strasbourg en formation d'enseignants et titulaires d'une licence.

-ses angles sont droits
-ses diagonales se coupent en formant des angles droits.

Puis dans l'énoncé, Marie affirme que le losange est un carré. L'étudiant ajoute :

Marie a raison c'est un carré, puisqu'en plus d'être un losange, OELM a ses diagonales de même longueur, OELM est un losange particulier.

En utilisant les outils développés pour observer les niveaux de VAN HIELE[29], nous pouvons conclure que cet étudiant, en accumulant les raisons, donne sa réponse dans le Niveau 1. Un autre manipule avec difficulté la classification hiérarchisée des quadrilatères.

Les 4 côtés du quadrilatère OELM ont la même mesure. Ce quadrilatère peut de ce fait n'être qu'un carré ou un losange, or un carré est un losange.
Les deux ont raison, Marie et Charlotte. En effet, c'est un carré, or un carré est un losange.

Ces exemples illustrent les difficultés qu'éprouvent les étudiants à la fois pour comprendre le paradigme demandé et aussi leur problème de maîtrise d'un Espace de Travail Géométrique[30]. Ils montrent ainsi la rémanence des phénomènes rencontrés chez les élèves.

3. L'adéquation ETG-Milieu

L'utilisation de l'ETG attendu par le professeur suppose que le milieu proposé aux étudiants définisse clairement les attentes. Cette question de la clarté du paradigme géométrique mis en jeu revêt un double aspect. Le premier, dépendant du cadre institutionnel, peut créer une ambiguïté de fait sur l'ETG attendu. En effet, a priori, les étudiants (futurs professeurs d'école) doivent savoir que le concours teste leurs compétences en Géométrie II. Cependant, ils souhaitent devenir enseignant en école primaire où la Géométrie I, même affadie, constitue le gros de leur travail. N'est-il pas alors légitime qu'ils se placent dans le paradigme qui sera celui de leur futur métier.

L'autre aspect porte sur la nature des problèmes posés : sont-ils clairement formulés en Géométrie II ? Il est facile de trouver de nombreux sujets de concours où la formulation de l'énoncé vient brouiller le jeu. Un des exemples d'ambiguïté les plus spectaculaires, sur le paradigme attendu, est celui que nous avons étudié sous le nom de « la cloche de Rouen »[31]. Le dessin d'une configuration semblable à une cloche est donné sans aucune indication sur la nature des figures tracées et sur les hypothèses retenues. La configuration doit être traitée perceptivement avec l'aide d'instruments de mesure pour lever certaines confusions visuelles, ainsi un compas ou une règle sont nécessaires pour la détermination du centre du cercle support d'un

[29]Voir notre article (20).
[30]L'équipe GreDiM d'Orléans a particulièrement travaillé sur ce point.
[31]Voir nos articles (8) ou (21).

arc. Les questions portent ensuite sur des constructions à la règle et au compas dont on ne sait pas le degré de justification attendu par les correcteurs.

D'autre part, un grand nombre de problèmes basés sur des constructions demandent en fait une maîtrise du jeu entre la Géométrie I et la Géométrie II. Voici à titre d'exemple un exercice posé en 2001 à Grenoble. Il s'agit de la dernière question d'un problème de géométrie jusque là assez classique.

> Construire un parallélogramme dont l'aire soit 1 cm^2 et dont le périmètre soit supérieur à 20 cm. Indiquer le procédé utilisé et justifier que le parallélogramme construit vérifie les conditions indiquées.

Il s'agit donc de produire un parallélogramme sur le papier dans un ETG propre à la géométrie I éventuellement contrôlé par la Géométrie II. La deuxième partie de la question poursuit dans cette direction.

> Pourrait-on construire un parallélogramme dont l'aire est 1 cm^2 et dont le périmètre soit supérieur à 1 m ? Si oui comment ? Si non pourquoi ?

Il est intéressant d'observer les solutions données dans deux livres d'annales corrigées. Dans le premier (Copirelem 2001), la construction, à la règle et au compas, proposée pour résoudre la première partie de la question, est reprise dans la deuxième partie. Mais, cette fois un des côtés du parallélogramme mesure plus de 50 cm. Une restriction cependant est amorcée par les auteurs qui parlent, sans aller plus loin, d'un point de vue théorique.

L'autre ouvrage (CRDP Aude 2001) conclut que la construction est impossible. Pour cela, les auteurs calculent la hauteur de ce quadrilatère et trouvent qu'elle devrait être inférieure à 0,4 mm et ils ajoutent :

> *Cela signifie que la distance entre les deux cotés sera inférieure à 4 dixièmes de mm. Les deux traits seraient confondus sur le dessin.*

Clairement, ils ont basculé dans la Géométrie I, et ils travaillent sur des approximations. Leur conclusion repose sur l'impossibilité affirmée de tracer des traits dont l'épaisseur est inférieure à 4 dixièmes de mm. Ont-ils vérifié cela ? NITZ l'a fait dans ses travaux sur l'approximation chez les dessinateurs[32], et il trouve des traits dont l'épaisseur est d'un vingtième de mm.

Ce type de situation nous semble un bon support de problème pour jouer sur les différents paradigmes à condition d'être conçu comme une situation didactique et de ne pas être posé à l'occasion d'un concours ou d'un examen. C'est le propos de ce qui suit.

4. Les problèmes à ETG ambigus

Pour découvrir des situations ambiguës, supports éventuels de PPD (Petites Provocations Didactiques), nous avons cherché des problèmes qui pouvaient jouer sur l'articulation entre les deux paradigmes et présenter ainsi certaines ambiguïtés. Mais cette fois ces ambiguïtés sont un élément du milieu didactique mis en place. L'analyse

[32] Il s'agit d'un mathématicien allemand du début du XX^{e} siècle, voir nos études (16) ou (17).

des différentes postures des étudiants, pendant la résolution de ces exercices, permet au professeur de donner sens aux paradigmes géométriques I et II.

Les constructions géométriques vont occuper une place privilégiée dans ces dispositifs. Elles permettront de pointer la différence entre les problèmes de construction effective et les problèmes de constructibilité. Dans ces exercices, il faudra changer de paradigme pour conclure sur l'existence des objets. De plus, le rôle particulier de l'approximation dans le jeu entre mesure et géométrie, permet aussi de trouver des situations remplissant a priori les conditions souhaitées.

Pour illustrer notre propos, voici un exemple de ce type de situation où la provocation liée à l'approximation apparaît dans un deuxième temps après une phase de construction.

> Quatre arcs de cercle (280°, 180°, 125° et 55°) de diamètres différents sont donnés sur une feuille de papier. Les étudiants doivent construire le cercle entier.

Le problème se situe dans l'espace des objets et la tâche est pratique. Le cercle, connu en partie, apparaît comme un dessin. Pour résoudre ce problème, les étudiants peuvent utiliser des connaissances issues des différents paradigmes géométriques. En Géométrie I, il peut s'agir de savoir-faire pratiques parfois non mathématiques, comme le pliage ou le report d'arcs de cercle décalqués, puis reportés plusieurs fois. En Géométrie II, il est possible de construire les médiatrices de cordes tracées sur les arcs ou d'utiliser la propriété des angles droits inscrits dans un demi-cercle. Dans ce cas, la Géométrie II joue le rôle d'une technologie pour des techniques utilisées en Géométrie I. Une différence apparaît entre les étudiants qui sont capables de justifier ces techniques et ceux qui les utilisent de manière aveugle.

Le problème n'est pas difficile et apparaît comme un problème de révision. Cependant, la grande hétérogénéité des étudiants, futurs professeurs d'école, fait apparaître une grande diversité de procédures relevant de chaque Géométrie.

A ce stade, les étudiants raisonnant en Géométrie II et utilisant la construction avec les médiatrices sont sûrs de leur position et simplement étonnés des procédures utilisées par leurs collègues. Une fois, la procédure experte usuelle comprise par tout le monde, nous donnons une nouvelle consigne : indiquer le rayon du cercle que vous avez construit sur le petit arc (celui de 55°). La provocation va provenir du fait qu'il existe une grande variété de mesure pour ce rayon, avec une amplitude relative importante : les étudiants essaient de trouver des justifications à ces différences et ils arrivent à la conclusion d'une sorte d'inadaptation de la théorie à la pratique mise en jeu ici.

Le but de cette situation et d'autres semblables est de mettre en évidence les différents rapports aux objets créés par les différentes Géométries. Elle vise aussi à bien montrer que chaque Géométrie a sa spécificité et son champ d'application, il n'y a en pas une supérieure à l'autre intrinsèquement : elles ne sont pas définies pour résoudre les mêmes types de problèmes.

A côté des activités de construction, il est aussi intéressant de rechercher des problèmes issus de manuels ou d'examens qui cristallisent les ambiguïtés et les difficultés que nous souhaitons montrer aux étudiants. Leur place dans le jeu institutionnel usuel a ainsi d'autant plus d'impact.

Les exemples que nous avons utilisés, jouent sur l'ambiguïté provoquée par les approximations numériques qui peuvent contredire des évidences visuelles. Voici un exercice[33] que nous avons proposé aux étudiants dans notre recherche. Il entre dans cette catégorie d'exercices de géométrie où la nature de l'espace de travail idoine pour résoudre le problème est loin d'être simple.

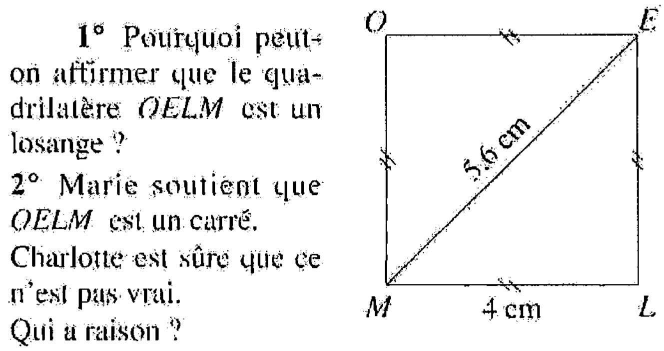


Figure 3.1 - Le problème de CHARLOTTE et MARIE

La figure dessinée ressemble à un carré mais suivant la Géométrie utilisée, elle le sera ou non. Comme le signale un étudiant :

Il n'y a pas de textes pour l'énoncé, il n'y a qu'un dessin qui peut tromper.

On peut interpréter le problème en Géométrie I en considérant que l'image proposée est un objet matériel dessiné. En effet, le dessin comporte des indications sur les dimensions des côtés et d'une diagonale. Ces dimensions sont données en cm et au dixième près : cette double indication semble préciser que l'espace local privilégié est un espace mesuré et que les nombres utilisés appartiennent à D1(nombres décimaux dont la valuation est inférieure à 1).

On peut aussi se placer en Géométrie II en considérant que les valeurs données ne sont pas des valeurs mesurées mais des valeurs exactes. De plus, le codage peut s'interpréter comme une indication discursive qui fait basculer en Géométrie II.

Tout le problème se ramène d'une manière ou d'une autre à estimer l'angle ELM et à savoir s'il est droit ou non. Si l'on se place en Géométrie I, il sera alors possible de mesurer et d'utiliser les outils de construction comme instrument de mesure. Sinon, le théorème de Pythagore joue un rôle fondamental dans ce type d'exercice en évitant le recours à une mesure effective. Il permet un changement de cadre en privilégiant l'approche numérique de la Géométrie. Pour notre propos, nous introduirons deux formes du théorème de Pythagore, une forme abstraite classique portant sur des nombres réels et sur des égalités

Si le triangle ABC est rectangle en B alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$

et une forme concrète pratique qui utilise des nombres approchés et, de façon moins courante, des figures approchées.

[33]Hachette Cinq sur Cinq 4$^{\text{ème}}$ 1998 p. 164.

Si le triangle ABC est « à peu-près »rectangle en B alors $AB^2 + BC^2 \approx AC^2$

En fait, nous préférerions présenter le théorème sous forme d'une équivalence qui, au moins dans un premier temps, diminuerait le jeu un peu formel sur la logique des propositions qui obère souvent le sens du théorème.

La première forme du Théorème permet de basculer simplement dans une Géométrie qui s'écarte des données de l'expérience en raisonnant ici de manière élémentaire dans le cadre numérique[34] qui sera plus généralement remplacé par un cadre algébrique à un niveau plus avancé des mathématiques et de la scolarité (Géométrie III). Quant à la seconde formulation, elle apparaît plutôt comme une forme avancée de Géométrie I.

Nous avons rencontré les deux types d'usage de la contraposée chez nos étudiants. Si l'on se place en Géométrie II, en utilisant la forme abstraite du théorème de Pythagore, alors on peut raisonner comme le propose un premier étudiant :

> *On sait que si OEM est rectangle en O alors on a $OE^2+OM^2=ME^2$*
> *On vérifie si on a* $4^2+4^2 = 5,6^2$ *mais* $32 \neq 31,26$. *Donc OEM n'est pas rectangle.*

Si on utilise le théorème de Pythagore pratique dans un cadre mesuré alors on suivra plutôt le raisonnement proposé par un autre étudiant :

> *C'est un carré si un angle au moins est droit entre deux côtés.*
> *L'angle $\widehat{MLE}$ est droit si et seulement si :*
> *$ML^2 + LE^2 = ME^2$ d'après le théorème de Pythagore*
> *16+16=32 or* $\sqrt{32} \approx 5,6$
> *Marie a raison $OELM$ est un carré.*

En fait, il faudrait conclure que le quadrilatère OELM est « presque »un carré mais comme on le sait, faute d'un langage adapté, il n'est pas possible aux élèves de jouer sur ces différentes distinctions.

Finalement, est-ce Charlotte ou Marie qui a raison ? La réponse dépend de la Géométrie utilisée et les étudiants vont ainsi être de fait confrontés à un malentendu à la fois épistémologique et didactique qui se manifeste dans la difficulté, que nous avons signalée, à déterminer l'espace de travail idoine.

5. Parcours d'étudiants dans les paradigmes

La recherche de problèmes supports de PPD et la mise en oeuvre de ces dernières en formation des enseignants constituent une phase importante de notre travail. Elle est étroitement liée à la conception et à la validation du cadre théorique que nous avons dégagé et qui de fait s'est construit en dialectique avec ce type de situations. Elles nous ont permis de mettre en valeur la diversité d'approche de la géométrie chez les étudiants. Mais, quel est l'effet de ce type de travail sur les étudiants ? Plus

[34]Cependant, il faut noter que dans l'enseignement du Collège le cadre numérique en jeu avec la Géométrie II souffre d'une lacune fatale : les nombres réels n'en font pas clairement partie, BRONNER(1997).

précisément, dans une perspective d'expertise « que comprennent-ils des paradigmes géométriques, du jeu entre ces paradigmes ». D'autre part « les situations proposées les ont-elles fait évoluer ? ».

L'évaluation de l'impact d'une formation est toujours difficile car elle suppose bien définis le point de départ et le point d'arrivée, et ceci hors de tout élément contingent. Dans le cas présenté ici, la formation initiale des professeurs d'école, le processus de recherche s'articule sur un processus de formation qui impose ses règles. Il est notamment problématique d'institutionnaliser fortement les notions de Géométrie I et II qui n'appartiennent pas au langage commun des formateurs et des correcteurs du concours. Le travail est rendu plus facile en formation continue de PLC et PE. En fait, et c'est un problème fondamental de la didactique qui en limite le développement et la confine souvent à un rôle critique : quelle niche trouve-t-on dans le système pour l'innovation non conforme aux programmes du moment ?

Pour déterminer le parcours possible d'un étudiant, nous avons utilisé le Tableau de Synthèse entre paradigmes et niveaux de pensée géométriques. Et ceci de façon à déterminer la posture initiale de l'étudiant dans l'écheveau complexe des géométries.

5.1 Autour d'un processus de formation[35]

Couplé à notre recherche, nous avons mis en place un processus de formation d'enseignants qui comporte trois grandes phases pour l'étudiant. Dans la première, il doit résoudre des problèmes de géométrie en précisant à chaque fois les difficultés qu'il a rencontrées ou qu'il lui semble voir dans l'exercice. Cette phase nous permet de situer les étudiants dans le Tableau de Synthèse. La position de cet étudiant est déterminée, grâce à ses réponses à trois exercices de géométrie. Il s'agira bien sûr d'une situation relative dépendant de la nature du problème étudié ou de l'ensemble des problèmes soumis aux étudiants.

Ensuite une sensibilisation des étudiants à l'existence des paradigmes s'effectue par l'intermédiaire d'une PPD exploitant le jeu entre les paradigmes.

Dans un troisième temps, un retour réflexif est proposé aux étudiants sur les problèmes qu'ils avaient cherchés dans la première phase. Des solutions rédigées lors de la première phase leur sont proposées par écrit. L'analyse des réponses des étudiants fournit un outil qui permet d'évaluer l'impact des situations de formation qui ont été choisies de manière à leur faire comprendre les divers paradigmes mis en oeuvre pour résoudre des problèmes.

La confrontation simultanée de chaque étudiant avec les conceptions des autres étudiants et celles de ses futurs élèves est réalisée grâce à cette question donnée dans le troisième temps du travail.

> Y-a-t-il des similitudes ou des liens entre les attitudes des étudiants par rapport au problème « losange-carré »[36] et celles des élèves par rapport au problème du « rectangle-cercle »[37] ?

---

[35]Ce processus a été mis en œuvre pendant deux ans à l'IUFM d'Alsace. Pour une présentation détaillée voir (20).

[36]Il s'agit du problème Charlotte et Marie.

[37]Il s'agit d'un problème donné à l'évaluation de sixième, voir (20) ou (22).

Cette confrontation assez radicale entre les difficultés des adultes et des élèves constitue de fait une provocation didactique. Les étudiants qui éprouvent des difficultés semblables à celles des élèves, peuvent tenter de surmonter leur problème grâce au retour réflexif provoqué par l'écrit individuel tel que nous le mettons en place. Pour les autres qui se situent de manière implicite en Géométrie II, le même effet d'étonnement doit être produit par la confrontation entre les productions de leurs pairs et celles des élèves.

La provocation produit effectivement l'effet d'étonnement que nous cherchions mais il reste à déterminer son réel impact formatif. Nous faisons l'hypothèse, basée sur notre étude de la dénaturation simplificatrice, que cet impact dépend de la place de l'étudiant dans notre Tableau de Synthèse. En fait nous avons formulé deux hypothèses a priori :

H1 Les étudiants maîtrisant suffisamment les règles du jeu dans la Géométrie II, peuvent comprendre ce jeu entre paradigmes.

H2 Les étudiants qui se placent spontanément en Géométrie I, sont susceptibles de rester dans ce paradigme et de ne pas comprendre le but de notre dispositif. Et ceci d'autant plus qu'ils se situeront dans des bas niveaux de la géométrie mise en jeu.

De fait, certains étudiants restent fixés sur les exercices qu'ils ont résolus avec difficultés. Voici certaines de leur formulation :

> *On constate que deux problèmes majeurs ont été rencontrés :*
>
> *- les incertitudes dues au dessin;*
>
> *- comment caractériser les losanges et les quadrilatères en général ?*

ou encore :

> *Au vue des réponses des différents étudiants je me suis rendue compte que je n'ai pas utilisé les mesures données sur la représentation graphique. Si c'était à refaire, je les inclurais dans ma recherche.*

Chez d'autres, nous constatons une légère prise de distance mais encore très personnalisée :

> *Si l'exercice était à refaire, j'utiliserai le théorème de* PYTHAGORE *- essentiel ici- et je m'avancerais moins franchement sur des affirmations trompeuses sur la simple lecture du dessin.*

Enfin, chez ceux qui avaient résolu sans trop de problèmes l'exercice en se plaçant en Géométrie II, surgit une certaine prise de conscience qui n'est pas sans poser certains problèmes :

> *J'ai été très surprise par le fait que les élèves mesurent le segment. Je trouve cette démarche très astucieuse mais elle est tout de même risquée.*
>
> *Mais je suis vraiment surprise car je n'aurai vraiment pas pensé à trouver la réponse en passant par la méthode de mesure réelle du segment.*
>
> *Ces productions d'élèves me montrent que je ne réfléchis plus comme les enfants, au lieu de chercher plus simplement je cherche toujours des propriétés, des théorèmes etc.*

Une déstabilisation très nette résulte de ce type de situation, notamment à cause de la proximité du travail des élèves et des étudiants.

> *Les seules similitudes que je vois c'est que les élèves comme certains étudiants se basent sur le dessin.*

Ce rapprochement est parfois vécu négativement. Pour le dépasser, nous faisons l'hypothèse que l'explicitation d'un cadre théorique « neutre » est indispensable. Par « neutre », nous voulons préciser que ce cadre ne donne pas une prévalence à une Géométrie sur une autre mais qu'il les articule dans une dialectique positive.

5.2 Variations et stabilité

Points de départ

Nous avons pu reproduire un an plus tard le processus de formation que nous venons de présenter. Le déroulement de la phase de confrontation a évolué, pour tenir compte des réactions des étudiants, d'une forme forte à une forme faible. Nous avons modifié cette phase pour, à la fois, diminuer le choc ressenti par les étudiants et obtenir le maximum d'information sur leur évolution possible.

Les données obtenues lors de la première partie de notre recherche nous ont fait dégager quatre grands types de réponses au problème « CHARLOTTE et MARIE » qui nous permettent de regrouper les étudiants en quatre populations[38]. Nous avons noté ces quatre populations GII, GIprop, GIperc, GIexp. Nous préciserons plus loin le sens de ces abréviations. A chaque fois, nous donnerons une réponse représentative de la population dégagée. Ces formulations sont importantes car elles ont ensuite été données à analyser par les étudiants.

Il y a d'abord les réponses (évoquées p. 48) qui utilisent le Théorème de PYTHAGORE. Ces réponses caractérisent les deux premiers groupes d'étudiants GII et Gprop.

GII. Dans ce cas, les réponses sont proches de celle de l'étudiant A [Et A]. Le théorème de PYTHAGORE classique est utilisé à l'intérieur du monde des figures et des nombres sans un regard sur l'apparence réelle de l'objet.

Et A

1. OELM est un losange car ses côtés successifs sont égaux.
2. Si OELM est un carré, alors MEL est un triangle rectangle en L. Selon le théorème de PYTHAGORE on aurait alors $ME^2 = ML^2 + LE^2$
   $ML^2 + LE^2 = 16 + 16 = 32$ et $ME^2 = 5{,}62 = 31{,}36$.
   L'angle $\widehat{ELM}$ n'est donc pas un angle droit. Par conséquent, OELM n'est pas un carré et c'est Charlotte qui a raison.

Nous considérerons cette population comme située en Géométrie II. Chez certains l'absence de regard, même rétrospectif, sur la figure oriente déjà vers une conception de la géométrie de type GIII.

GIprop. Cette population regroupe les étudiants qui utilisent le théorème de PYTHAGORE pratique.

---

[38]Notons que dans notre population, une légère majorité d'étudiants choisit Marie (« C'est un carré »), affirmation en accord avec l'impression visuelle.

Ils donnent une réponse semblable à celle-ci [Et B] :

Et B
1. OELM est un losange car OE=OM=ML=LE et un losange a ses 4 côtés de même longueur.
2. Marie a raison car tous les côtés du quadrilatère ont la même longueur et il y a au moins un angle droit. On peut le vérifier par le théorème de PYTHAGORE. $ML^2+LE^2=ME^2$
   $4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$
   $ME=\sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5,6$ donc MLE=90°

Dans ce cas, les étudiants ne sont pas insensibles au dessin et à l'importance de l'approximation due aux mesures. Le théorème de PYTHAGORE pratique apparaît comme un outil de la Géométrie I. Nous avons désigné cette population par GIprop pour insister sur le fait que les individus de ce groupe utilisent des propriétés pour raisonner. La question est de savoir si ces étudiants sont en transition entre la Géométrie I et la Géométrie II ou bien si leur horizon reste uniquement technologique.

À côté de ces réponses, nous rencontrons celles des étudiants qui n'ont pas utilisé le théorème de PYTHAGORE et que nous situerons a priori dans la Géométrie I.

GIexp. Nous regroupons ici les étudiants qui utilisent leurs outils de dessin et de mesure pour conclure. Ils se situent dans le monde de l'expérience de la Géométrie I.

Généralement, ce type d'étudiants conclut que Marie a raison. Mais, ce n'est pas toujours le cas : un étudiant, en utilisant son compas, vérifie que les sommets du quadrilatère ne sont pas cocycliques et il peut ainsi affirmer qu'OELM n'est pas un carré.

Voici la forme rédigée que nous avons donnée à analyser aux étudiants et qui insiste sur le rôle des instruments.

Et C
1. OELM est un losange car ses diagonales se coupent en leur milieu (mesure) en formant des angles droits (avec l'équerre).
   Remarque : l'étudiant a construit la deuxième diagonale sur la figure.
2. Marie a raison. C'est un carré, puisque en plus d'être un losange, OELM a ses angles droits (équerre).

GIper. Nous regroupons dans cette dernière population les réponses basées sur la perception : l'information semble vue sur le dessin sans aucune autre précision sur le raisonnement suivi.

Et D
1. Quatre côtés du quadrilatère sont parallèles entre eux et de la même longueur OE=ML et OM=EL. Selon la définition d'un losange, nous pouvons dire que les diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires entre eux.
2. Marie a raison; OELM est aussi carré parce que ses côtés forment un angle droit.

Cette population est très hétérogène pour les niveaux de VAN HIELE. Il est souvent difficile d'interpréter les réponses qui sont souvent minimales et réduites à des affirmations. Pour mieux comprendre les travaux des étudiants et ainsi placer leurs solutions dans notre Tableau Synthétique, nous leur avons aussi demander de décrire par écrit leurs difficultés pour résoudre le problème.

Cette manière de procéder lève ainsi certaines ambiguïtés, voici par exemple la réponse d'AURÉLIE. Elle a dessiné la diagonale OL et a désigné le point d'intersection des diagonales par la lettre A.

1. Un losange est un quadrilatère dont les 4 côtés sont égaux et dont les diagonales sont perpendiculaires. Or, dans le quadrilatère OELM, OE=EL=LM=MO. De plus [OL] est perpendiculaire à [ME].
2. OELM est un carré car il est formé de 4 angles droits. Marie a donc raison.

En examinant sa réponse, nous remarquons un bon niveau de raisonnement, mais qui prend appui sur le dessin d'une façon plutôt perceptive. Mais, voici comment elle explique ses difficultés :

> *Peut-on dire que les diagonales sont vraiment perpendiculaires ?*
>
> *Peut-on dire que le quadrilatère possède 4 angles droits ? En utilisant l'équerre, oui. En calculant avec* PYTHAGORE, *ce n'est pas exact, mais approximatif.* $5,62^2 = 31,36 \neq 32$

Cette réponse « off » est particulièrement riche. D'abord, nous voyons qu'AURÉLIE a utilisé les instruments de construction pour vérifier sur la figure et qu'elle a aussi pensé à utiliser le théorème de PYTHAGORE « approché ». Son raisonnement s'appuie donc sur une expérience et se montre proche de celui utilisé dans le groupe **GIprop**. Ses hésitations semblent dénoter une étudiante en transition entre GI et GII : impression que va confirmer sa réponse à la question posée dans le nouveau dispositif de confrontation que nous avons mis au point.

Evolutions

Nous avons donné à analyser par écrit les quatre réponses d'étudiants (non membres du groupe) que nous venons de présenter. Nous avons également posé la question suivante :

> *De quelle production, votre production initiale était-elle la plus proche ? Pourquoi ? Et si c'était à refaire maintenant, de quelle production votre réponse serait-elle la plus proche et pourquoi ?*

Nos résultats[39] montrent un certain nombre d'évolutions : onze étudiants changent d'avis et concluent que Charlotte a raison. Cette réponse devient ainsi majoritaire. Ils révèlent aussi la persistance du point de vue technologique de la Géométrie I chez un nombre relativement important d'étudiants[40].

Nous récapitulons nos résultats dans ce diagramme.

[39]Nous n'envisageons ici que les 46 étudiants qui ont pu suivre tout le processus de formation.

[40]Dans notre cas, le tiers des étudiants (16 sur 46)

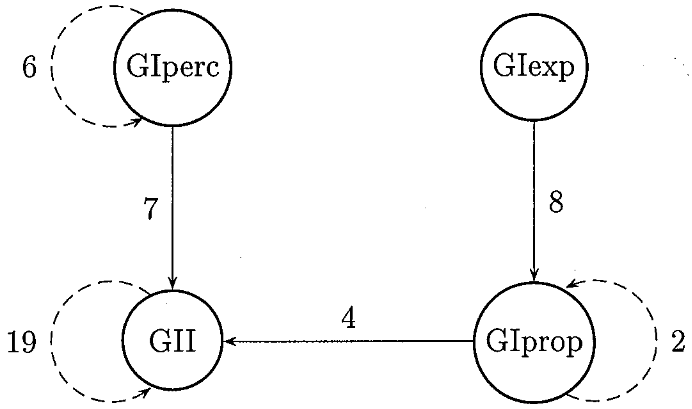


Figure 3.2 - Parcours d'étudiants

Parmi les étudiants qui ne changent pas d'avis, il y a d'abord tous les étudiants de **GII** qui ont raisonné comme l'[Et A]. Ils se sont placés en Géométrie II et justifient leur résultat par des calculs.

Il y a aussi tous les étudiants (8) situés dans le groupe **GIexp**. Ils maintiennent que Marie a raison. Mais, ils donneraient maintenant une solution étayée par le théorème de PYTHAGORE pratique semblable à celle de l'[Et B] (**GIprop**) pour soutenir leur conclusion. Ces étudiants semblent se situer dans la Géométrie I. Pour eux le dessin est essentiel dans un horizon technologique.

Les deux autres populations n'ont pas un comportement unanime. Quatre étudiants (sur 6) qui sont placés dans **GIprop**, optent maintenant pour Charlotte et suivent le raisonnement de l'[Et A] basé sur le théorème classique de PYTHAGORE. Ils changent leur première solution avec pour certains une sorte d'acte de contrition :

> *j'ai préféré (malheureusement) l'approximation et j'ai répondu que Marie avait raison.*

La population **GIper** (13 étudiants), qui a répondu Marie en se fiant à la figure sans utiliser le théorème de PYTHAGORE, se partage en deux groupes. Une partie (7) opte pour Charlotte et suit le raisonnement de l'[Et A] (**GII**). L'autre reste fidèle à son premier avis et n'utilise pas le théorème de PYTHAGORE même si certains étudiants jugent son emploi intéressant pour les calculs.

Il semble que l'hétérogénéité de cette population renvoie à deux conceptions différentes de la géométrie cachées par le fait qu'ils n'ont pas utilisé le théorème de PYTHAGORE pour résoudre le problème. En effet, un étudiant qui n'a pas pensé à utiliser le théorème de PYTHAGORE, est privé d'une façon de résoudre le problème dans GII. Il semble que parmi cette population quelques personnes ont répondu Marie par défaut : ils sont immédiatement d'accord avec [Et A] qui leur donne une réponse insérée dans la Géométrie II. Les autres étudiants restent dans une approche perceptive insérée dans la Géométrie I : ils utilisent généralement un bas niveau de VAN HIELE.

Les réponses à cette question confirment la grande variabilité des parcours des étudiants et renforcent les constatations déjà faites en affinant certaines de nos hypothèses sur les parcours individuels. Nous n'irons pas plus loin dans cette présentation car notre propos n'est pas ici de tirer des conclusions quantitatives mais plutôt d'éclairer le lecteur sur les utilisations possibles de notre cadre théorique.

Perspectives de recherches

Dans notre conception de la didactique des mathématiques, un cadre théorique ne prend tout son sens que dans son interaction avec des thèmes de recherches suscités par des questions sur l'enseignement des mathématiques. Dans cette optique plusieurs voies d'investigation sont possibles : certaines visent plutôt à étoffer et à approfondir notre approche théorique, d'autres à développer ses applications à l'enseignement et à la formation des enseignants. Nous allons envisager successivement ces deux points.

1. Développement du cadre théorique

1.1 Étude de la pertinence du modèle dans un autre contexte culturel et national.

Comme nous l'avons déjà indiqué de nombreuses études montrent la différence de perception de la géométrie enseignée suivant les pays. Au sein du laboratoire Didirem, notre équipe est actuellement engagé dans un projet de collaboration avec le Chili.

Les premiers éléments de la recherche[41], semblent montrer l'intérêt de l'approche paradigmatique dans ce type d'étude plutôt macrodidactique. En utilisant les concepts et la terminologie introduits dans notre travail, il est alors possible de poser un certain nombre de questions qui cernent la comparaison.

Quelle est la nature des paradigmes géométriques introduits dans l'enseignement ?

Quels sont les moments et les formes de leur introduction ? Comment s'effectue la négociation du passage d'une géométrie à l'autre ?

Quels sont les jeux de cadres privilégiés dans les deux systèmes.

D'autres questions portent davantage sur les formes et les contenus des espaces de travail géométriques :

- le rôle et nature des objets géométriques (notamment la notion de figure),
- le type d'artefacts,
- les niveaux d'explicitation des modèles de référence.

D'autre part, l'entrée par le biais des paradigmes doit aussi intégrer une perspective historique dans l'étude des curricula. En effet, dans un même pays les réponses aux questions précédentes n'ont pas toujours été les mêmes. Il s'agit ici de distinguer ce qui est spécifique de chaque pays (et alors pourquoi ?) de ce qui est circonstanciel.

[41] Notamment une analyse fine des programmes par CASTELA.

1.2 Étude des parcours d'étudiants en formation.

Il s'agit ici de compléter l'étude qualitative des questionnaires que nous avons fait passer aux futurs enseignants. L'objectif est de réunir en classes de similitude tous les parcours individuels que nous avons pu identifier. Un des buts de cette recherche est de parvenir à dégager certains invariants susceptibles de servir d'appui pour une étude plus rapide des difficultés rencontrées par les étudiants dans la structuration de leur ETG personnel.

1.3 Le problème spécifique de l'enseignement de la géométrie dans l'espace.

Dans son monumental travail sur la géométrie et le problème de l'espace , GONSETH [1945-1952] articule tout son raisonnement autour de la géométrie plane. A la fin de son ouvrage, GONSETH affirme que ses conclusions s'appliquent à toute la géométrie mais qu'il s'est limité à la géométrie plane dans son exposé par commodité et parce que les exemples sont plus faciles à comprendre. Fondamentalement, cette remarque est vraie pour le cadre théorique que nous avons développé, il n'en demeure pas moins qu'il reste à analyser les spécificités de la géométrie dans l'espace en précisant tous les espaces de travail mis en jeu.

1.4 La spécificité des espaces de travail géométriques avec logiciel de géométrie.

Le développement de la notion d'espace de travail qui définit les artefacts comme un de ses trois pôles constitutifs permet d'éclairer de manière différente certains problèmes rencontrés par les didacticiens spécialistes des environnements informatiques. Cela implique une recherche sur les logiciels pédagogiques déjà mis en œvre dans l'enseignement mais aussi des logiciels professionnels de construction. Dans cette optique, nous pensons utiliser les résultats de l'équipe du département informatique de l'Université Louis Pasteur qui travaille justement sur les problèmes de constructions géométriques automatiques.

1.5 L'extension de l'approche paradigmatique.

Jusqu'à présent, nous avions abordé avec beaucoup de prudence l'extension de notre approche en terme de jeux paradigmatique à d'autres domaines des mathématiques. D'autres chercheurs comme DROUHARD, à partir de son étude de l'algèbre, n'ont pas hésité à envisager une « approche paradigmatique » générale. Que signifie exactement cette désignation. Qu'en est-il réellement de la validité de cette approche ?

Dans ce cadre, il pourrait être intéressant de s'appuyer sur des domaines où le jeu de la modélisation est fondamental comme les probabilités et la statistique ou des champs mathématiques particulièrement balayés par les révolutions scientifiques comme l'analyse.

2. Recherche appliquée : concevoir une autre géométrie que celle actuellement enseignée

Quelles conséquences peut-on tirer de nos recherches pour la pratique quotidienne de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire ? Notre étude suscite la perspective d'un enseignement de la géométrie articulé autour des jeux entre les diverses géométries. Elle peut ainsi conduire à développer un enseignement conscient de la Géométrie I en tant que géométrie du dessin et des constructions. Puis un travail sur l'approximation et la modélisation pourrait favoriser une entrée différente dans la géométrie II. Enfin, la Géométrie III pourrait être introduite grâce à la constitution de nouveaux espaces de travail intégrant les approches intrinsèques.

Toutes ces perspectives doivent être sérieusement étudiées avant d'être éventuellement proposées dans le cursus standard des élèves. L'idée est d'éviter la confusion fréquente qui consiste à considérer comme des vérités pédagogiques ce qui n'est que la conséquence d'une réflexion historique, mathématique ou épistémologique a priori. Pour cela, j'inscris aussi mes recherches dans le cadre institutionnel de « groupes de formation et de recherche » où une telle expérimentation est possible.

Articles de référence

Les stratégies de formation

(1) KUZNIAK A, (1993) 2003 Le conflit socio-cognitif en formation des maîtres. *Copirelem. Concertum. 10 ans de formation des professeurs des écoles en mathématique Arpeme Ed.* Tome 3 pp. 63-70.
(2) KUZNIAK A, (1994) *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré.* Thèse de l'Université Denis Diderot-Paris VII.
(3) KUZNIAK A, (1994) 2003 Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré, *Copirelem. Concertum 10 ans de formation des professeurs des écoles en mathématique Arpeme Ed.* Tome 3 pp. 7-22.
(4) HOUDEMENT C (1995) *Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies*, Thèse de doctorat, Université Paris VII.
(5) HOUDEMENT C, KUZNIAK A, (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des mathématiques* vol 16.3 pp. 289-322.
(6) HOUDEMENT C, (1998) Stratégies de formation des maîtres du premier degré *Les cahiers du formateurs* Irem Paris 7, Tome 2 pp. 2-14.

La géométrie enseignée

Cadre général

(7) KUZNIAK A, (1996) 2003 L'enseignement de la géométrie en formation initiale des Professeurs d'écoles *Copirelem. Concertum 10 ans de formation des professeurs des écoles en mathématique Arpeme,* tome 2 pp. 7-18.
(8) HOUDEMENT C, KUZNIAK A, (1999) Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics,* vol 40/3 pp. 283-312.
(9) HOUDEMENT C, KUZNIAK A, (1999) Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres, *Revue Petit X* n°51 pp. 5-21.
Article repris dans la revue *Grand N* n°58.
(10) HOUDEMENT C, KUZNIAK A, (2000) Formations des maîtres et paradigmes géométriques, *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol 20/1 pp. 89-116.
(11) KUZNIAK A, (2001) Espace(s) de travail de la géométrie élémentaire *Actes du colloque « Quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental »* Irem de Montpellier pp. 291-300.

(12) PARZYSZ B. (2001) 2003 Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1 *Copirelem Concertum 10 ans de formation des professeurs des écoles en mathématique.*, tome 2 pp. 7-18.
(13) KUZNIAK A, (2004) Espaces de travail géométriques. *Actes du colloque sur la formation des maîtres.*, Avignon, Irem d'Aix-Marseille.

Approche intrinsèque

(14) KUZNIAK A,(2001) Sur une approche intrinsèque de la géométrie enseignée. *Géométrie in Bulletin de l'APMEP* n°435 pp. 507-518.
(15) KUZNIAK A, (2000) Un essai de lecture didactique du texte de Riemann sur les fondements de la géométrie. De la géométrie euclidienne aux géométries intrinsèques. *Actes du colloque sur la formation des maîtres de Chamonix.* Université de Grenoble pp. 359-367.

Sur l'approximation

(16) HOUDEMENT C, KUZNIAK A,(2002) Entre géométrie et mesure : le jeu de l'approximation *Actes de l'Ecole d'été de Didactique des Mathématiques* La pensée sauvage pp. 349-355.
(17) HOUDEMENT C, KUZNIAK A, (2002) Approximations géométriques. *L'Ouvert* n°105 pp. 19-28.
(18) HOUDEMENT C, KUZNIAK A, (2003) Quand deux droites sont « à peu près » parallèles ou le versant géométriques du « presque » égal, *Revue « petit x »* n°61 pp. 61-74.

Sur les modalités d'action didactique

(19) HOUDEMENT C, KUZNIAK A, (2001) Pretty (good) didactical provocation as a tool for teacher's training in geometry. *Proceedings of CERME 2 Marianska Lazne. Charles University. Prague*, pp. 292-304
(20) KUZNIAK A, RAUSCHER JC (2002) Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, *Actes du colloque sur la formation des maîtres de La Roche sur Yon* Université de Nantes
(21) HOUDEMENT C, KUZNIAK A, (2003) Elementary geometry split into different geometrical paradigms *Proceedings of CERME 3 Belaria Italie* 9 pages
(22) KUZNIAK A, RAUSCHER JC (2004) Processus de formation de PE1 et PLC1 et anamnèse géométrique, *Actes du colloque sur la formation des maîtres*, Avignon, Irem d'Aix-Marseille.

Bibliographie

Il ne s'agit ici que d'un bref parcours parmi les ouvrages ou les articles qui m'ont le plus servi ou/et qui sont cités dans cet ouvrage.

ARNAULD A, NICOLE P. (1674) 1965 *La logique ou l'art de Penser,* Ed PUF Paris.

ARSAC G. (1998) Les limites d'une enseignement déductif de la géométrie, *petit x* n°47, pp. 5-31.

ARSAC G., MANTE M. (1997) Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics.* Vol 33, n°1.

BARBIN E. (1988) La démonstration mathématique : significations didactiques et questions épistémologiques. *Bulletin de l'APMEP* n°366, pp. 591- 620.

BARBIN E.(1991) Les éléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée. *Repères IREM* n°4, pp. 119-133.

BERTHELOT R., SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire,* Thèse de l'Université de Bordeaux

BERTHELOT R., SALIN M.H. (1995) Savoirs et connaissances dans l'enseignement de la géométrie, in *Différents types de savoirs et leur articulation,* La Pensée Sauvage Editions, Grenoble, pp. 187-204,

BERTHELOT R., SALIN M.H.(2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. *Revue petit x* n°56, pp. 5-34.

BERTRAND L. (1778) *Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques* Genève

BKOUCHE R. (1988) Enseigner la géométrie, pourquoi? *Repères-IREM* n°1, pp. 92-101.

BOI L. (1995) *Le problème mathématique de l'espace,* Springer

BLOCH I.(2002) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques,* La pensée sauvage, Grenoble pp. 125-139.

BRONNER A. (1997) *Étude didactique des nombres réels : idécimalité et racine carrée.* Thèse de l'université de Grenoble I.

BROUSSEAU G. (1998) *La Théorie des Situations Didactiques,* La pensée sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (2002) Cadres, jeux de cadres et théories des situations *Actes de la journée Douady,* Irem Université Paris VII.

BROUSSEAU G. (1987) L'enseignement de la géométrie en tant que modèle de l'espace in *Thèse d'état* Université de Bordeaux, pp. 447-481.

CAPPONI B., LABORDE C. (1994) Cabri-Géomètre, constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* n°14/1.2, pp. 165-210.

CAPPONI B., LABORDE C. (1995) Modélisation à double sens *Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques*, pp. 265-278

CAVEING M., (1997) *La figure et le nombre*, Septentrion, Lille.

CHEVALLARD Y., JULLIEN M.(1991) Autour de l'enseignement de la géométrie, première partie. *petit x* n°27, pp. 41-76.

CLAIRAUT (1741) *Elements de Géométrie,* David et fils.

CREM (2000) Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement. *Bulletin de l'Apmep* N°430.

DESANTI J. T. (1975) Qu'est-ce qu'un problème épistémologique in *La philosophie silencieuse,* Le Seuil, Paris, pp. 110-132.

DIEUDONNÉ J. (1964) *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* Hermann

DORIER J. L. (1997) *Note d'habilitation pour diriger des recherches*, Université de Grenoble

DOUADY A.(1999) Géométrie dans les espaces de paramètres. Une méthode de géométrisation, *Repères*, 71-90.

DOUADY R.(1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol 7/2.

DUVAL R. (1988) Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* n°1 pp. 57-74.

DUVAL R. (1992) Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive? *petit x* n°31, pp. 37-61.

DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM* n°17, pp. 121-138.

DUVAL R. (1995) Why to teach geometry, *Icmi Studies on Geometry*, Catania pp. 53-58.

DUVAL R. (1996) *Sémiosis et Pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

ENRIQUES F. (1906) 1989 *Problemi della scienza*, Zanichelli, Bologne.

FISCHBEIN E. (1987) *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach.*, Reidel.

FISCHBEIN E. (1993) The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 24, n°2. 139-162.

FISCHBEIN E., MARIOTTI M. (1997) Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics* Vol 34, n°3.

FLORIS R. (1995) La géométrie traite-t-elle des illusions d'optique? Quatre élèves aux prises avec le triangle aplati. *petit x* n°39.

FREGONA D. (1995) *Les figures planes comme milieu dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques.* Thèse de l'Université de Bordeaux I.

FREUDENTHAL H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel Kluwer.

GADAMER H.G. (1976) *Vérité et méthode*, Ed Seuil, Paris. Traduction française de Truth and Method (1962) Sheed and Ward, London.

GIL F. (1988) *Preuves*, Aubier, Paris.

GILLIES ED. (1992) *Revolutions in Mathematics*, Oxford University Press.

GOBERT S. (2001) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement élémentaire* Thèse de l'Université Diderot Paris.

GONSETH F. (1926) 1974 *Les fondements des mathématiques* Ed Blanchard, Paris.

GONSETH F. (1936) 1974 *Les mathématiques et la réalité* Ed Blanchard, Paris.

GONSETH F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Lausanne.
GRANGER G. C. (1968) *Essai d'une philosophie du style*, Armand Colin, Paris.
GRANGER G. C. (1994) *Formes, Opérations, Objets*, Vrin Paris.
GRANGER G. C. (1999) *La pensée de l'espace* Odile Jacob, Paris.
GUILBAULT G.T. (1987) *Leçons d'à peu-près*, Bourgois Paris.
HILBERT D.(1899) *Grundlagen der Geometrie* Teubner, trad française 1971 *Les fondements de la géométrie*, Paul Rossier, Dunod.
HJELMSLEV J. (1939) La géométrie sensible, *L'enseignement mathématique* pp. 7-27 et 294-322.
HOLLAND G. (1996) 2001 *Geometrie in der Sekundarstufe*, Spektrum Berlin.
HÖLZL R.(1996) How does dragging affect the learning of geometry, *International Journal of computers for Mathematical Learning*, vol 6-1.
ICMI (1995) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* Catania.
KNIPPING C. (2002), *Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement - Analyse comparative de l'enseignement en Allemagne et en France*, Thèse Université de Hambourg et de Grenoble.
KUHN T.S. (1962) *The structure of scientific revolutions* Trad *La structure des révolutions scientifiques* 1983 Flammarion Paris.
KUHN T.S. (1977) En repensant aux paradigmes in *La tension essentielle* Odile Jacob 1977
LABORDE C. (2001) Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving, *Educational Studies in Mathematics* Vol 44 1-2 pp. 151-161.
LABORDE C. (1988) L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* n°9/3, pp. 337-364.
MARGOLINAS C. (2002) Situations, milieux, connaissances- Analyse de l'activité du professeur, *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*, La pensée sauvage Grenoble, pp. 141-155.
MARIOTTI M. A. (2001) La preuve en mathématique *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* vol 1 n°4 pp. 437-458.
MESQUITA A.LOBO (1989) Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie, *Educational Studies in Mathematics* Vol 20 pp. 55-77.
NICOD J. (1923) 1962 *La géométrie dans le monde sensible*, PUF
PANZA M. ET PONT J. C. EDS (1992) *Espace et horizon de réalité. Philosophie mathématique de Ferdinand Gonseth*, Masson.
PARZYSZ B. (1988). Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, Vol 19 n°3.
PARZYSZ B. (1991) Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée, *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 11/2-3 pp. 211-240.
PLUVINAGE F. (1998) La nature des objets mathématiques dans le raisonnement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* Vol.6. 125-138.

PLUVINAGE F., RAUSCHER J.C. La géometrie construite mise à l'essai, *petit x* n°11 pp. 5-36

RABARDEL P. (1995) *Les hommes et les technologies* Armand Colin, Paris.

RAUSCHER J.C. (1993) *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : cas de l'enseignement de la géométrie en début de collège* Thèse de l'Université de Strasbourg.

RIEMANN B. (1854) *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde Liegen* trad Laugel. Blanchard 1968

ROYAL SOCIETY (2001) *Teaching and Learning Geometry 11-19.*

SALIN M.H. (2002) Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie de situations.*Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*, La pensée sauvage pp. 111-124.

STEINBRING H. (1998) Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of mathematics Teacher education* 1.2 pp. 157-189.

STRAESSER R. (2002) Cabri-Geometre Does Dynamic Geometry Software change geometry and its teaching and learning. *International Journal of computers for Mathematical Learning* vol 6-3 Kluwer pp. 319-333.

TALL D.(1995) Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. *Plenary lecture at the conference of PME*, Recife, Brazil.

TALL D., GRAY E. ET AL. (2001) Symbols and Bifurcation Between Procedural and Conceptual Thinking, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* vol 1 n°1 pp. 81-104.

VAN HIELE, P.M. (1986) *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*, Orlando. Academic Press.

WEBER M. (1906) L'objectivité de la connaissance dans les sciences et la politique sociales dans *Essais sur la théorie de la science*, Press Pocket.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

Titre
PARADIGMES ET ESPACES DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUES

Auteur
ALAIN KUZNIAK

Résumé
Cette publication présente la genèse et les éléments d'un cadre théorique développé pour l'étude de la géométrie enseignée et dont la finalité sur le long terme est de construire une didactique de la géométrie pour la formation des enseignants (PE et PLC).

L'approche de la didactique de la géométrie élémentaire est ainsi basée sur une explicitation et un jeu entre différents paradigmes géométriques : la Géométrie I (géométrie naturelle), la Géométrie II (géométrie axiomatique naturelle) et la Géométrie III (géométrie axiomatique formaliste). Plus que les noms, ce qui importe ici c'est l'existence de plusieurs approches cohérentes de la géométrie élémentaire vue comme une théorisation de l'espace.

L'activité géométrique se déploie dans un espace particulier : l'espace de travail de la géométrie. Cet espace s'organise autour de trois composantes : l'espace support, le modèle théorique et les artefacts. Cette organisation dépend de la géométrie de référence mais aussi de l'utilisateur.

La notion d'espace de travail de la géométrie est en devenir et reste largement en chantier, la faire progresser en la faisant connaître est un des propos de cette publication. Enfin, des perspectives de recherches et des thèmes de travaux possibles sont proposés.

Mots-Clés
Didactique de la géométrie, Paradigmes, Espace de travail, Formation des enseignants, Stratégies de formation.

Editeur : **IREM**
Directeur responsable de la publication : M. Cori
Dépôt légal : 2004 ISBN : 2-86612-248-8

Université Denis Diderot
Irem Paris 7
CP 7018 Tour 56/55 - 3e étage
2 place Jussieu 75251 Paris cedex 05
Tel : 01 44 27 53 83 - Fax : 01 44 27 56 08